Wzór Eulera jako równanie

Równanie diofantyczne to równanie algebraiczne rozwiązywane wśród liczb całkowitych, względnie w jakimś ich ustalonym podzbiorze; nazwa pochodzi od imienia Diofantosa, greckiego matematyka z III wieku.

Wzór $W - K + S = 2$ można potraktować jako równanie diofantyczne rozwiązywane dla $W \geq 4$, $S \geq 4$. Nie każdemu rozwiązaniu (czyli trójce (W, K, S)) odpowiada jakiś wielościan wypukły mający akurat tyle wierzchołków, krawędzi i ścian – np. trójce $(4, 7, 5)$ nie odpowiada żaden wielościan – choć są rozwiązania dla dowolnego ustalonego W czy S, a także dla $K = 6$ i $K \geq 8$. Nie podamy tu ogólnie, po czym poznać, którym rozwiązaniom odpowiadają wielościany, a którym nie. Podamy tylko pewne wyniki dotyczące bardziej regularnych wielościanów.

Aby uzyskać wielościan platoński – w każdym wierzchołku zbiega się tyle samo (powiedzmy p) jednakowych (powiedzmy q-kątnych), foremnych ścian – wystarczy zauważyć, że $pW = 2K = qS$ oraz zarówno p, jak i q nie przekraczają 5. Po wyeliminowaniu ze wzoru Eulera W i S otrzymujemy

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K},$$

które to równanie ma pięć rozwiązań i każdemu odpowiada żądany wielościan.

Tu (i dalej) byłoby przemiło ze strony Czytelnika, gdyby zechciał sprawdzić nasze gołosłowne deklaracje. Gotowych rozwiązań można szukać np. w *Delcie* 4/1984 lub w czasopiśmie *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* nr 7.

Aby uzyskać wielościan archimedesowy – każdy wierzchołek jest takim samym cyklem foremnych ścian – trzeba się pomęczyć nieco dłużej, ale w istocie postępuje się nawet jeszcze prościej. Jeśli w wierzchołku spotyka się s_i ścian l_i-kątnych $(i = 1, \ldots, n)$ – uwaga! lekceważymy sobie ich porządek cykliczny – mamy

$$W \cdot \sum_{i=1}^{n} s_i = 2K \quad \text{oraz} \quad W \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{l_i} = S,$$

co po wyeliminowaniu K i S daje

$$\left(2 - \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \left(1 - \frac{2}{l_i}\right)\right) \cdot W = 4.$$

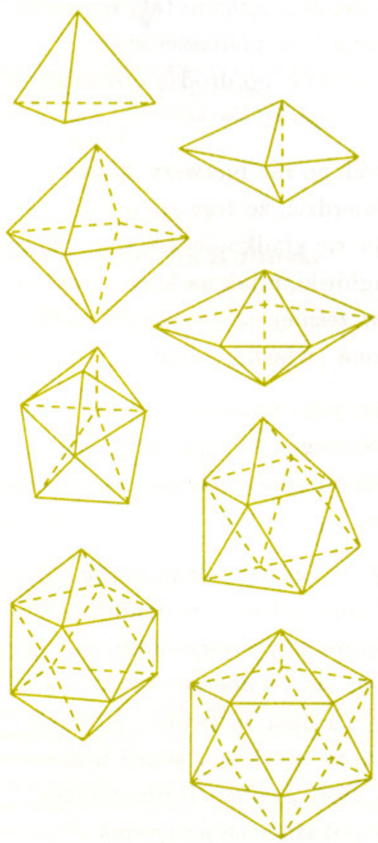
Z pełną lekkomyślnością zajmujemy się tylko tym, by znaki się zgadzały, co prowadzi do wymagania, by dodatnia była zawartość nawiasu, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \left(1 - \frac{2}{l_i}\right) < 2.$$

Bez większego trudu stwierdzamy, że musi być $n < 4$ i w efekcie rozwiązujemy dwie nierówności diofantyczne:

$$s_1 + s_2 - 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2}\right) < 2 \quad \text{i} \quad s_1 + s_2 + s_3 - 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} + \frac{s_3}{l_3}\right) < 2.$$

Z geometrii wiemy, że w każdym z przypadków suma s_i jest równa 3, 4 lub 5. Mamy więc do rozwiązania 6 nierówności. Aby i tym razem każdemu rozwiązaniu odpowiadał wielościan, należy tylko pamiętać, że
gdy l_1 jest liczbą nieparzystą, to albo $s_1 > 2$, albo $s_2 > 1$, albo $s_3 > 1$,
co pozostawiamy do uzasadnienia Czytelnikowi. Rozwiązań nierówności jest 13 plus dwie nieskończone serie. I istnieje trzynaście wielościanów archimedesowych (jeden nawet w dwóch postaciach) oraz archimedesowe graniastosłupy (dwa n-kąty foremne połączone paskiem kwadratów) i antygraniastosłupy (dwa n-kąty foremne połączone paskiem trójkątów równobocznych).



Oto rysunki wszystkich wielościanów wypukłych mających ściany będące trójkątami równobocznymi; mają one kolejno cztery, sześć, osiem, dziesięć, dwanaście, czternaście, szesnaście i dwadzieścia ścian.

Jest jednak sytuacja, gdzie takie postępowanie staje się niesłychanie nieefektywne. Mianowicie, gdy poszukujemy wielościanów wypukłych o ścianach będących trójkątami równobocznymi.
Oznaczając przez w_i liczbę wierzchołków, w których zbiega się i ścian, mamy

$$3w_3 + 4w_4 + 5w_5 = 2K = 3S \quad \text{oraz} \quad W = w_3 + w_4 + w_5,$$

co, po wyeliminowaniu ze wzoru Eulera W, K i S, daje

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12.$$

Równanie to ma jednak 19 rozwiązań, choć odpowiednich wielościanów istnieje tylko 8. Wcale nie jest łatwo wykazać, że akurat tak jest: fakt ten nazywa się **twierdzeniem Freudenthala–van der Waerdena**.

A oto rozwiązania (w_3, w_4, w_5) odpowiedniego równania: (4, 0, 0) (3, 1, 1) (3, 0, 3) (2, 3, 0) (2, 2, 2) (2, 1, 4) (2, 0, 6) (1, 4, 1) (1, 3, 3) (1, 2, 5) (1, 1, 7) (1, 0, 9) (0, 6, 0) (0, 5, 2) (0, 4, 4) (0, 3, 6) (0, 2, 8) (0, 1, 10) (0, 0, 12).