

Wielościany sztywne, ruchome i te trzecie

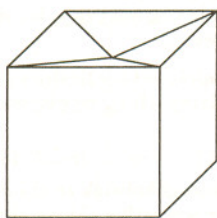
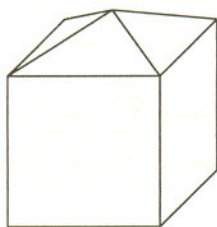
Na początek spójrzmy nieco inaczej na pierwszą cechę przystawania trójkątów. Zdanie

jeśli $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ i $CA \equiv C'A'$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

wyraża następujący fakt

jeśli istnieje izometria φ_1 nakładająca AB na $A'B'$, izometria φ_2 nakładająca BC na $B'C'$ i izometria φ_3 nakładająca CA na $C'A'$, to istnieje jedna izometria φ nakładająca równocześnie wszystkie te odcinki.

Izometria: przekształcenie nie zmieniające odległości.



Rys. 1. Sześcian, w którym jedna ściana zastąpiona została piramidką na zewnątrz, i drugi, gdzie piramidka jest do wewnątrz.

Wielokąt (n -kąt) nazywamy **sztywnym**, gdy spełnia warunek jeśli istnieją izometrie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nakładające odpowiednio poszczególne boki danego wielokąta na boki jakiegoś innego wielokąta, to istnieje jedna izometria φ , która nakłada je jednocześnie.

Z łatwością stwierdzamy, że spośród wielokątów sztywnych są jedynie trójkąty. Sztywność wielościanów definiujemy w analogiczny sposób, jako możliwość zastąpienia izometrii nakładających poszczególne ściany przez jedną izometrię. Rysunek 1 pokazuje przykład wielościanu, który nie jest sztywny. Bez większych kłopotów stwierdzamy, że czworościan foremny jest sztywny, podobnie sześciątka czy ośmiościan foremny, ale dwudziestościan foremny już nie.

Wśród wielokątów czy wielościanów niesztywnych wyróżnić można wielokąty (wielościany) **ruchome**. Oznacza to, że nie tylko istnieją nie przystające wielokąty (wielościany) o przystających bokach (ścianach), lecz istnieje także ciągłe przejście pomiędzy nimi, które na każdym etapie zachowuje przystawanie ścian. Z łatwością stwierdzamy, że każdy niesztywny wielokąt jest ruchomy. Z pewnością też możemy stwierdzić, iż istnieją wielościany niesztywne, które nie są ruchome – taki jest np. wielościan z rysunku 1.

A oto jak wygląda problem sztywności i ruchomości wielościanów:

- wielościany wypukłe są sztywne (Augustin Louis Cauchy, 1813);
- istnieją wielościany ruchome (Robert Connelly, 1977).

Precyzując wynik Cauchy'ego: wypukły ma być zarówno wielościan, jak i jego obraz (por. rys. 1).

W tym tekście przedstawię szkic dowodu twierdzenia Cauchy'ego i przypomnę (publikowane już w *Delcie*: 7 i 8/1987) przykłady ruchomych wielościanów.

Twierdzenie Cauchy'ego

Krok pierwszy dowodu polega na tym, aby stwierdzić, że wielościany wypukłe, mające odpowiednio przystające ściany i odpowiednio przystające kąty dwuścienne, są przystające. Nie jest to trudne do uzasadnienia, więc szczegóły pozostawię Czytelnikom; polega to uzasadnienie na wybraniu pewnej ściany i doklejaniu kolejno ścian następnych – wypukłość i znajomość kątów dwuściennych powodują, że jest to jednoznaczne. Dla zakończenia dowodu należy zatem wykazać, że te kąty dwuścienne muszą być równe.

Zajmiemy się w tym celu wielokątami sferycznymi: leżą one na sferze, ich boki to łuki okręgów wielkich, czyli leżących w płaszczyznach przechodzących przez środek sfery, ich kąty to kąty dwuścienne między tymi płaszczyznami. Potrzebne nam będą dwa spostrzeżenia o tych wielokątach.

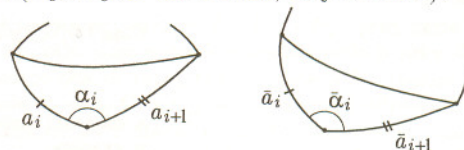
Przyjmijmy oznaczenia: w n -kącie bok $X_i X_{i+1}$ ma długość a_i (dla $i = 1, \dots, (n-1)$); bok $X_n X_1$ ma długość a_n , kąt przy i -tym wierzchołku ma rozwartość α_i .

Spostrzeżenie 1

Jeśli dwa wypukłe n -kąty sferyczne spełniają warunki $a_i = \bar{a}_i$ dla $i = 1, \dots, (n-1)$ i $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$ dla $i = 2, \dots, (n-1)$, to $a_n \leq \bar{a}_n$, przy czym gdy chociaż jedna z nierówności między kątami jest ostra, ostra jest też nierówność między bokami.

Dowodzi się tego indukcyjnie.

1° Dla $n = 3$ dowód jest taki sam, jak dla płaskiego trójkąta (a jaki jest ten dowód, Czytelniku?).

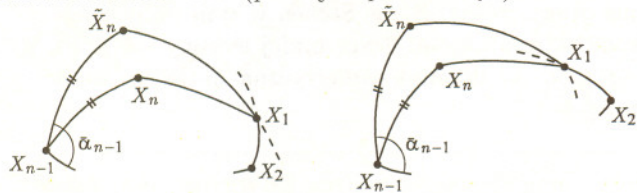


Rys. 2

2° Gdy chociaż w jednym przypadku mamy równość kątów, to odcinamy od obu wielokątów równy róg (rys. 2), co kończy krok indukcyjny.

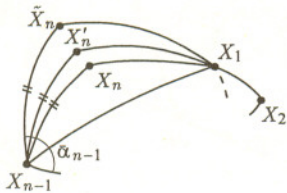
3° W pozostałym przypadku będziemy powiększali kąt przy wierzchołku X_{n-1} do rozwartości $\bar{\alpha}_{n-1}$.

3.1. Gdy powiększenie nie zepsuje wypukłości wielokąta (rys. 3), to krok indukcyjny polega na zastosowaniu 1° i 2° (proszę to przećwiczyć).



Rys. 3. Z lewej sytuacja korzystna, z prawej niekorzystna.

3.2. Gdyby otrzymany wielokąt miał być niewypukły, postępujemy inaczej – obracamy bok $X_{n-1}X_n$ wokół X_{n-1} dopóty, dopóki wielokąt jest wypukły (rys. 4). Na mocy założenia indukcyjnego dla $(n-1)$ -kątów $X_2, \dots, X_{n-1}, X'_n$ i $\bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}'_n$ mamy $X_2X'_n \leq \bar{X}_2\bar{X}_n$.



Rys. 4. Sytuacja, gdy $\angle X_{n-2}X_{n-1}X'_n < \bar{\alpha}_n$, a punkty X_2, X_1, X'_n leżą na jednym łuku.

Podobnie, dla trójkątów X_1, X_{n-1}, X_n i X_1, X_{n-1}, X'_n mamy $X_1X_n \leq X_1X'_n$. Łącznie daje to

$$a_n = X_1X_n \leq X_1X'_n = X_2X'_n - X_1X_2 \leq \bar{X}_2\bar{X}_n - \bar{X}_1\bar{X}_2 \leq \bar{X}_1\bar{X}_n = \bar{a}_n,$$

co kończy dowód spostrzeżenia 1.

Następne spostrzeżenie też poprzedzimy określeniem: dla dwóch n -kątów sferycznych S i \bar{S} funkcja λ przyporządkowuje i liczbę $+1$, gdy $\alpha_i < \bar{\alpha}_i$, liczbę 0 , gdy $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$; i liczbę -1 , gdy $\alpha_i > \bar{\alpha}_i$. Zmianą znaku nazywamy sytuację, gdy $\lambda(i) \cdot \lambda(i+1) = -1$ (także gdy $\lambda(n) \cdot \lambda(1) = -1$).

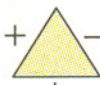
Spostrzeżenie 2 (lemat Cauchy'ego)

Dla dowolnych S i \bar{S} , takich, że $a_i = \bar{a}_i$, dla $i = 1, \dots, n$, albo nie ma zmian znaku, albo są przynajmniej 4.

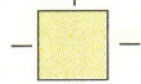
Ponieważ liczba zmian znaku jest parzysta, więc należy wyeliminować 2. Przypuśćmy więc, że dla S i \bar{S} liczba zmian znaku jest właśnie dwa. Niech wierzchołki X_i i X_j oddzielają tę część wielokąta, gdzie $\lambda(k) \leq 0$, od części, gdzie $\lambda(k) \geq 0$. Oznaczmy te części odpowiednio przez P_1 i P_2 . Stosując spostrzeżenie 1 do P_1 i \bar{P}_1 otrzymujemy $X_iX_j < \bar{X}_i\bar{X}_j$, stosując zaś do P_2 i \bar{P}_2 otrzymujemy $X_iX_j > \bar{X}_i\bar{X}_j$ – sprzeczność.

dla i -kąta liczba zmian znaku nie przekracza

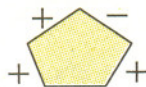
2 dla $i=3$



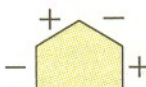
4 dla $i=4$



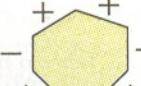
4 dla $i=5$



6 dla $i=6$



6 dla $i=7$



ogólnie $2E\left(\frac{i}{2}\right)$.

Powracamy do dowodu twierdzenia Cauchy'ego. Rozpatrzmy funkcję ψ przeprowadzającą wielościan V na wielościan \bar{V} w ten sposób, że każda ściana przechodzi na ścianę przystającą. Mamy wykazać, że ψ zachowuje kąty dwusienne.

Weźmy pod uwagę małą sferę o środku w pewnym wierzchołku wielościanu (małą = otaczającą tylko jeden wierzchołek). Przecięcie wielościanu z tą sferą to wypukły wielokąt sferyczny. Tak robimy w każdym wierzchołku. Mamy więc (dzięki funkcji ψ) w odpowiednich wierzchołkach wielościanów V i \bar{V} wypukłe wielokąty sferyczne o odpowiednio równych bokach. Pozwala to przenieść na wielościany oba poczynione spostrzeżenia.

Ponieważ kąty otrzymanego na danej sferze wielokąta sferycznego to kąty dwusienne wielościanu, więc możemy przenieść funkcję λ na krawędzie wielościanu V definiując (ciągle na ustalonej sferze) dla krawędzi k funkcję $\mu(k) = \varepsilon$, gdy w odpowiadającym jej wierzchołku X_i odpowiedniego wielokąta sferycznego mamy $\lambda(i) = \varepsilon$ (gdzie $\varepsilon = -1, 0, +1$). Następnie dwie krawędzie nazywamy sąsiednimi, gdy należą do jednej ściany i mają wspólny koniec. Dla krawędzi sąsiednich k i l określamy funkcję $\nu(k, l) := \mu(k) \cdot \mu(l)$. W tej terminologii mamy wykazać, że ν ma być tożsamościowo równa 0.

Rozpatrzę tu przypadek, gdy żadna z wartości funkcji μ nie jest równa zeru (zostawiając Czytelnikom problem, jak pozbyć się – coś dorysować, coś zaniedbać – niepotrzebnych krawędzi: tych, dla których μ jest równe 0). Z lematu Cauchy'ego wiemy, że liczba zmian znaku w każdym wielokącie sferycznym jest co najmniej 4 – w całym wielościanie ich liczba N jest co najmniej równa $4W$ (gdzie W to liczba wierzchołków wielościanu). Z drugiej strony, gdy oznaczymy przez S_i liczbę i -kątnych ścian wielościanu, mamy $N \leq 2S_3 + 4S_4 + 4S_5 + 6S_6 + 6S_7 + \dots$ (patrz schematy na marginesie).

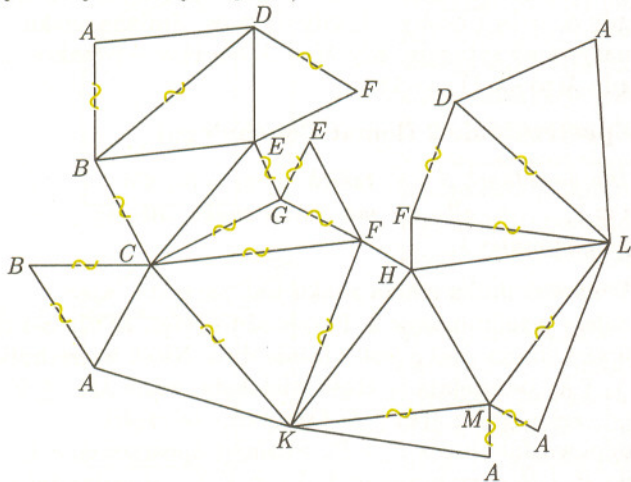
Jeśli wziąć pod uwagę, że $2K = \sum iS_i$, gdzie K to liczba krawędzi wielościanu, mamy łącznie

$$4K - 4S = 6S_3 + 8S_4 + 10S_5 + 12S_6 + 14S_7 + \dots - (4S_3 + 4S_4 + 4S_5 + 4S_6 + 4S_7 + \dots) = 2S_3 + 4S_4 + 6S_5 + 8S_6 + 10S_7 + \dots \geq N \geq 4W.$$

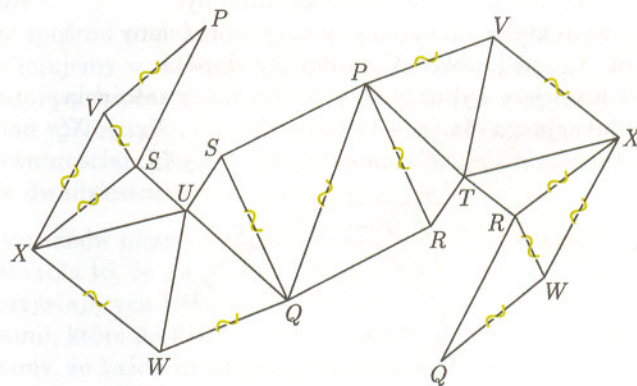
Ale to oznacza, iż $S - K + W \leq 0$, co jest SPRZECZNE ZE WZOREM EULERA. Koniec.

Przykłady Connelly'ego i Steffena

Robert Connelly szukał odpowiedzi na pytanie, czy założenie wypukłości jest konieczne, by nie istniały ruchome wielościany. Bowiemi przez 150 lat nikt odpowiedzi na to pytanie dać nie umiał, co więcej, intuicje różnych matematyków dawały każdej z możliwości szanse bliskie 50% (matematycy są ambitni i rzadko wstrzymują się od wypowiedzi na pytanie *jak ci się zdaje...*).



Gdy jednak wskazał ruchomy wielościan – ang. *flexor* ($(W, K, S) = (18, 27, 11)$ – a więc homeomorficzny ze sferą), okazało się, że na następny nie trzeba było już długo czekać. Klaus Steffen w tym samym jeszcze roku wyprodukował flexor mniej złożony – $(14, 21, 9)$ – mający na dodatek symetryczną siatkę, co widać niżej.



Schematy do zbudowania modeli ruchomych wielościanów. Po empirycznym stwierdzeniu, że wielościan się rusza; należy, rzecz jasna, wykazać, że nie wynika to jedynie z niedoskonałości wykonania (dla modelu Connelly'ego można to znaleźć np. w *Delcie* 8/1987). Z lewej model Connelly'ego, z prawej Steffena; Nie należy rysunków traktować jak siatki, lecz jak instrukcje. Krawędzie przekreślone odpowiadają wypukłym kątom dwuściennym (ostrzem na zewnątrz), pozostałe – wklęsłym.

A oto wymiary w dowolnych jednostkach:

Connelly: $AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9$, $AD = BE = CE = HM = 12$, $AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15$, $AM = FH = 4$, $BD = CF = CK = DL = 16$, $CG = 11$, $EG = 5$, $FG = 7$;

Steffen: $PQ = 17$, $PR = QR = PS = QS = TX = UX = VX = WX = 12$, $RT = SU = RW = SV = 5$, $PT = QU = PV = QW = RX = SX = 10$, $TV = UW = 11$.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MIS MaP) w Uniwersytecie Warszawskim

Rekrutacja w roku 1997

Siedem Wydziałów Uniwersytetu Warszawskiego: Biologii, Chemii, Fizyki, Geografii i Studiów Regionalnych, Geologii, Matematyki, Informatyki i Mechaniki oraz Psychologii prowadzi od 1992 r. Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MISMaP).

Egzamin wstępny (pisemny) odbędzie się 20 czerwca 1997 r. i obejmie wybrane dwa spośród pięciu testów z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii, których zakresy obejmują programy nauczania w klasach o profilach specjalistycznych w liceach ogólnokształcących. Do egzaminu może przystąpić każdy posiadacz świadectwa maturalnego, który do 1 czerwca złoży standardowe dokumenty. Egzamin ma charakter konkursowy; przy kwalifikacji nie będą brane pod uwagę oceny na świadectwie maturalnym. Laureaci wszystkich Olimpiad szczebla centralnego oraz abiturienti z maturą międzynarodową z co najmniej 37 punktami (na 45) zostaną przyjęci bez egzaminu. Finałiści Olimpiad zwolnieni są z egzaminu z odpowiedniego przedmiotu. Przewidujemy przyjęcie łącznie około 100 osób.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia są bezpłatnymi studiami dziennymi. Każdy ze studentów pozostaje pod opieką profesora lub adiunkta reprezentującego kierunek najbliższy jego zainteresowaniom. Studenci wraz z opiekunami ustalają własne, indywidualne programy studiów złożone z przedmiotów prowadzonych na wymienionych wyżej wydziałach oraz pewnych przedmiotów uzupełniających.

Wszelkie dodatkowe informacje, także o możliwości studiów na każdym z uczestniczących Wydziałów po zdaniu egzaminu wstępnego na MISMaP, można uzyskać w Sekretariacie MISMaP, ul. Pasteura 7, 02-093 Warszawa, we wtorek w godz. 9–12 oraz w czwartki w godz. 12–15 lub telefonicznie (tel. (0-22) 658-22-52). W Sekretariacie można także nabyć w cenie 9 zł *INFORMATOR MIS MaP*, zawierający m.in. wszystkie pytania testowe z lat 1992–96. Osoby zamieszkałe poza Warszawą mogą zamówić Informator za zaliczeniem pocztowym.

Kierownik Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych w Uniwersytecie Warszawskim

prof. dr hab. Andrzej HENNEL