

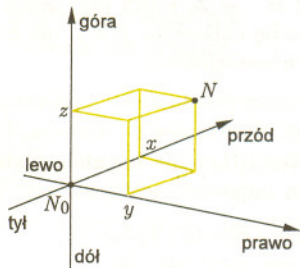
O możliwych formach naszej przestrzeni

Jak wygląda przestrzeń, w której żyjemy?

Tak sformułowane pytanie pojawia się w czasopismach dość często, a odpowiedzi udziela zwykle architekt, ekolog lub geograf. Co w tej sprawie ma do powiedzenia matematyk?

Można go, na przykład, zapytać o własności geometryczne otaczającej nas przestrzeni. Naturalnie, interesuje nas *sama* przestrzeń, a nie przedmioty, które ją wypełniają. Dlatego, dla uproszczenia, nie będziemy się zajmować wypełniającymi ją obiektami.

Wyobraźmy więc sobie, że stoimy na środku ogromnego, pustego i mrocznego hangaru. Jakie geometryczne cechy przestrzeni zdołamy zauważyć? Wydaje się, że jedyną sensowną obserwacją będzie to, że możemy się w niej swobodnie przemieszczać. Gdy skupimy uwagę na jednym punkcie (np. na czubku nosa N), to jesteśmy w stanie przesunąć go w dowolnym kierunku na praktycznie dowolną odległość. Przy tym, choć mamy do wyboru nieskończenie wiele kierunków, to każde przesunięcie punktu N może być zrealizowane przez kolejne wykonanie przesunięć w trzech (tylko!) „podstawowych” kierunkach: przód–tył, prawo–lewo i góra–dół. Jeśli chodzi o odległości, to wygodnie jest umówić się, że przesunięcie o 10 metrów do tyłu jest tym samym co przesunięcie o -10 metrów do przodu (i podobnie dla dwóch pozostałych wyróżnionych kierunków). Wtedy ruch w każdym z podstawowych kierunków można opisać jedną liczbą rzeczywistą, a podanie trzech liczb (x, y, z) wystarczy, by zadać jednoznacznie dowolne przesunięcie.



Ustalmy dowolnie jeden z punktów N_0 naszej przestrzeni. Położenie każdego innego punktu N możemy teraz wyrazić poprzez wskazanie trójki liczb rzeczywistych, opisującej ruch nasuwający N_0 na N . Zabieg ten pozwala utożsamić naszą przestrzeń ze zbiorem \mathbb{R}^3 wszystkich trójek liczb rzeczywistych.

Rys. 1

Mamy więc do dyspozycji ładny model arytmetyczny naszej przestrzeni. Jej punktom odpowiadają trójki liczb; odległość punktów $N_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $N_2 = (x_2, y_2, z_2)$ możemy obliczyć, używając wzoru Pitagorasa:

$$d(N_1, N_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Traktowanie punktu jak trójki liczb pozwala opisywać (nawet skomplikowane) podzbiory naszej przestrzeni za pomocą równań lub nierówności, poddawać je łatwo najróżniejszym przekształceniom, itp.

Powyższy model przestrzeni ma jeszcze jedną zaletę: łatwo go przenieść „na inne wymiary”. Istotnie, nic nie stoi na przeszkodzie, by zamiast trójek rozpatrywać n -tki liczb rzeczywistych (x_1, \dots, x_n) i mierzyć odległość między nimi wzorem, będącym oczywistym uogólnieniem wzoru Pitagorasa. Powstaje w ten sposób n -wymiarowa przestrzeń kartezjańska \mathbb{R}^n , będąca prostym modelem dla zjawisk, opisywanych przez n niezależnych parametrów.

Czy istotnie wynika stąd, że żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^3 ? Zwróćmy uwagę na to, że nasz opis powstał wewnątrz hangaru, tj. z obserwacji tylko niewielkiego fragmentu przestrzeni.

Niewykluczone więc, że popełniliśmy błąd, pochopnie uogólniając wyniki lokalnych badań na całą przestrzeń.

Łatwo sobie wyobrazić taki błąd w sytuacji dwuwymiarowej: sfera o wielkim promieniu istotnie wygląda z bliska jak kawałek płaszczyzny, choć wcale nią nie jest. Dlatego pogląd, że Ziemia jest płaska, miał kiedyś wielu zagorzałych zwolenników.

Co zatem wiemy na pewno? Punkt N_0 ma otoczenie, które wygląda jak kawałek \mathbb{R}^3 . Nie ma też powodu wierzyć, że żyjemy w części przestrzeni, która jest w jakikolwiek sposób wyróżniona. Dlatego zapewne każdy punkt N będzie miał podobne otoczenie.

Prowadzi to do pojęcia *rozmaitości*. Rozmaitością n -wymiarową nazywamy przestrzeń, w której każdy punkt ma otoczenie wyglądające tak, jak kawałek przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^n . Tak więc, żyjemy na pewnej rozmaitości trójwymiarowej. Ale na jakiej?

Uzyskanie odpowiedzi na to ostatnie pytanie wymaga eksperymentów fizycznych. Jest tu jednak także zadanie dla matematyka. Powinien on mianowicie przedstawić listę możliwych światów, wraz z opisem ich geometrycznych własności. Wtedy fizyk będzie mógł, po wykonaniu odpowiednich doświadczeń, rozstrzygnąć, który z zaproponowanych modeli odpowiada rzeczywistości.

Zadanie polega więc na stworzeniu pełnej listy rozmaitości trójwymiarowych.

Jak się do tego zabrać w sytuacji, gdy nie jest wcale oczywiste, że w ogóle istnieją rozmaitości wymiaru trzy, różne od samej przestrzeni \mathbb{R}^3 ? Jeśli mamy szukać całkiem nowej rozmaitości, to powinna się ona jakoś „zagiąć”, ale trudno sobie wyobrazić, jak to się ma zdarzyć.

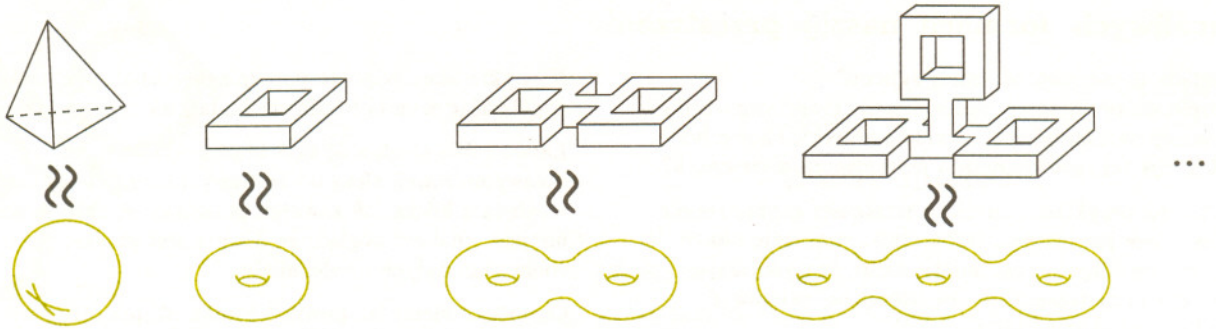
Przyczyną tych trudności jest nasze przyzwyczajenie do umiejscawiania wszystkiego w pobliskiej okolicy, tj. właśnie w \mathbb{R}^3 . Musimy się zatem nauczyć myśleć o przestrzeniach inaczej.

Możemy sobie, na przykład, wyobrazić, że podzieliliśmy całą przestrzeń na niewielkie, wielościenne bryły, ściśle ją wypełniające. Zamiast starać się „zobaczyć” całą przestrzeń naraz, możemy o niej myśleć jak o kolekcji brył posklejanych między sobą parami ścian. Oczywiście, sklejając je należy tak, by każdy punkt na spojeniach miał otoczenie postaci \mathbb{R}^3 .

Bryłami tymi mogą być, na przykład, czworościany. Mówimy wówczas, że przeprowadziliśmy *triangulację* przestrzeni. Twierdzenie Moise’a z 1952 roku mówi, że każda rozmaitość wymiaru trzy ma triangulację.

Odpowiednikiem powyższych rozważań w dwóch wymiarach byłoby budowanie z trójkątnych klocków powierzchni, które w okolicy każdego punktu wyglądają jak kawałek płaszczyzny \mathbb{R}^2 . Nietrudno w ten sposób wyprodukować nieskończoną serię precli (rys. 2 na następnej stronie) z rosnącą liczbą dziur.

Precle są powierzchniami *zwartymi* i *spójnymi*. Zwartość oznacza, że skleiliśmy je ze skończenie wielu trójkątów. Spójność – że są w jednym kawałku, czyli że każde dwa trójkąty triangulacji można połączyć łańcuchem trójkątów, kolejno do siebie przylegających jednym bokiem.

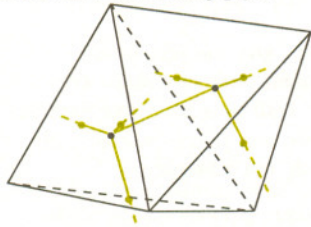


Rys. 2. To wszystko precele: bez dziur (sfera), z jedną dziurą (torus), z dwiema i z trzema.

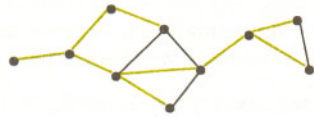
Wróćmy do wymiaru trzy. Jak można ulepić z czworościanów zwartą i spójną rozmaitość trójwymiarową? Oczywiście, sednem problemu jest opis sklejeń. Możemy to zrobić dość łatwo za pomocą prostego wybiegu.

Załóżmy na chwilę, że otrzymaliśmy w prezencie taką rozmaitość z triangulacją. Możemy z nią związać pewien układ punktów i łączących je odcinków, czyli *graf dualny*. Postępujemy tak: w środku każdego czworościanu wybieramy jeden punkt. Dwa spośród nich łączymy odcinkiem wtedy i tylko wtedy, gdy otaczające je czworościany mają wspólną ścianę (rys. 3).

Łatwo udowodnić przez indukcję, że w każdym skończonym i spójnym grafie można wybrać *drzewo maksymalne*, tj. podgraf (rys. 4), który zawiera wszystkie wierzchołki i nie zawiera żadnej pętli.



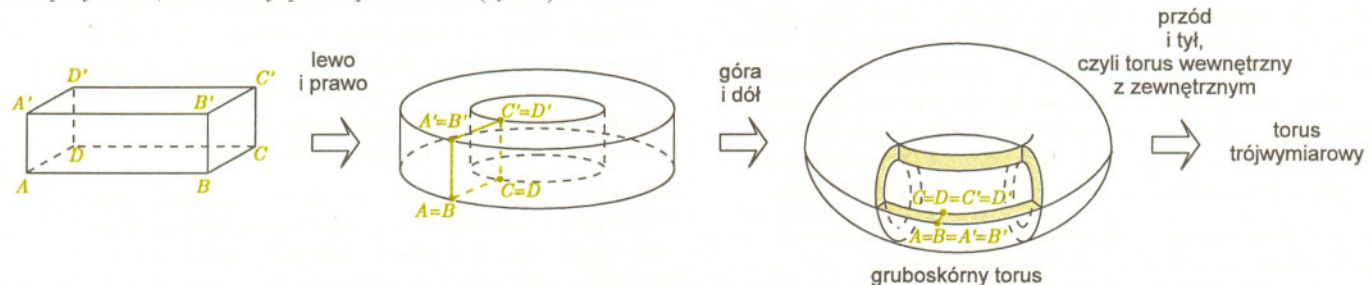
Rys. 3



Rys. 4

Rozsypmy teraz naszą rozmaitość na pojedyncze czworościenne klocki i zlepmy je z powrotem, ale tylko wzdłuż tych ścian, które odpowiadają krawędziom grafu dualnego, należącym do ustalonego maksymalnego drzewa. To, co powstanie, będzie wielościanem o trójkątnych ścianach, bez trudu mieszczącym się w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Zauważmy, że zawiera on wszystkie klocki, z których zbudowana była wyjściowa rozmaitość. Aby ją odtworzyć, należy po prostu dokończyć proces sklejanania. Polega to na odpowiednim posklejaniu parami trójkątnych ścian naszej bryły. Udowodniliśmy zatem, że każdą zwartą i spójną rozmaitość trójwymiarową można otrzymać z pewnego wielościanu, przez odpowiednie identyfikacje par jego ścian.

Dla przykładu, rozważmy prostopadłościan (rys. 5)



Rys. 5. Rysunek niemożliwy: sklejamy kolejno pary przeciwległych ścian prostopadłościanu uzyskując torus trójwymiarowy.

$ABCD A' B' C' D'$. Gdy pozlepimy przeciwległe pary ścian, otrzymamy rozmaitość, zwaną *torusem trójwymiarowym*. Rozmaitość ta jest, oczywiście, czymś innym niż \mathbb{R}^3 , bo ona jest zwarta, a \mathbb{R}^3 – nie.

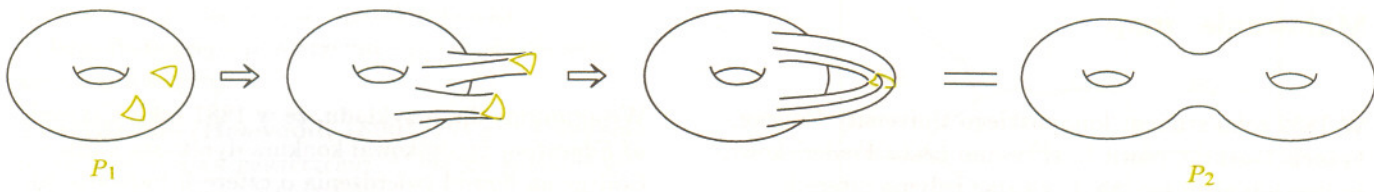
Zmieniając wielościan i sposoby identyfikacji par jego ścian, możemy otrzymać jeszcze inne przykłady rozmaitości trójwymiarowych. Wiemy już, że w ten sposób zbudujemy wszystkie rozmaitości zwarte i spójne. Ale ile ich naprawdę jest? Powiedzmy, że daliśmy dwóm osobom po wielościanie i poprosiliśmy je o wskazanie takich zlepień par ścian, by z każdego z nich powstała rozmaitość. Załóżmy, co więcej, że zadanie zostało wykonane. Jak przekonać się o tym, że otrzymane rozmaitości są istotnie różne?

Problemy *rozróżniania* rozwiązuje się w matematyce zwykle przez wskazanie odpowiedniego *niezmiennika*. Niech TM^n oznacza zbiór wszystkich rozmaitości wymiaru n z triangulacją. Aby rozróżnić dwie rozmaitości M_1, M_2 , wystarczy znaleźć funkcję $f : TM^n \rightarrow \mathbb{Z}$, która przypisuje każdej rozmaitości X pewną liczbę całkowitą $f(X)$, tak że – jeśli X, Y są takie same (*homeomorficzne*),
to $f(X) = f(Y)$,
– $f(M_1) \neq f(M_2)$.

Powyższa uwaga jest, oczywiście, całkowicie banalna. Cała sztuka polega na konstruowaniu odpowiednich funkcji f .

Nauczmy się najpierw rozróżniać (zwarte i spójne) rozmaitości wymiaru dwa. Ograniczymy się, dla uproszczenia, do powierzchni *dwustronnych*, tzn. takich, które nie zawierają w sobie *wstęgi Möbiusa*.

Kopiując rozumowanie z przypadku trójwymiarowego, Czytelnicy zechcą sami przekonać się o tym, że każda taka powierzchnia może być otrzymana z pewnego wielokąta, przez odpowiednie zlepianie par jego boków. Niezbyt skomplikowane manipulacje tym wielokątem pozwalają dalej udowodnić, że każda powierzchnia dwustronna jest precele z g dziurami, gdzie $g \geq 0$. Aby mieć pełną klasyfikację takich powierzchni, powinniśmy jeszcze wykazać, że precele P_g są różne dla różnych liczb g .



Rys. 6. Od $g = 1$ do $g = 2$.

Rozpocznijmy od P_0 , czyli sfery dwuwymiarowej. Sferę podzieloną na trójkąty możemy sobie wyobrazić jako brzeg wypukłego wielościanu o trójkątnych ścianach. Jeśli W , K i S oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian triangulacji, to słynny *wzór Eulera* mówi, że zawsze $W - K + S = 2$, niezależnie od podziału sfery.

Rozważmy zatem funkcję $\chi : TM^2 \rightarrow \mathbf{Z}$ o wartościach całkowitych, daną wzorem $\chi(X) = W - K + S$. Podobnie jak dla sfery, można udowodnić, że liczba $\chi(X)$ nie zależy od wyboru triangulacji powierzchni X , tzn. χ jest niezmiennikiem. Nazywamy ją *charakterystyką Eulera–Poincarégo* rozmaitości X . Wystarczy zatem obliczyć $\chi(P_g)$ dla $g \geq 0$. Jeśli okaże się, że liczby $\chi(P_g)$ są różne dla różnych g , to będzie to dowód, że powierzchnie P_g są parami topologicznie różne.

Już wiemy, że $\chi(P_0) = 2$. Zauważmy, że precel P_{g+1} można otrzymać z precla P_g przez wykonanie kolejno następujących dwóch operacji (rys. 6):

- wycięcie dwóch rozłącznych, otwartych (bez brzegu) trójkątów triangulacji,
- zlepienie ich brzegów.

Zauważmy, że tak otrzymany precel P_{g+1} ma o 2 trójkąty, 3 krawędzie i 3 wierzchołki mniej niż precel P_g , od którego zaczynaliśmy. Jeśli $\chi(P_g) = W - K + S$, to $\chi(P_{g+1}) = (W - 3) - (K - 3) + (S - 2) = \chi(P_g) - 2$. Łatwy dowód indukcyjny daje wzór $\chi(P_g) = 2 - 2g$.

Spróbujmy przenieść powyższe doświadczenia na przypadek trójwymiarowy. Jeśli triangulacja rozmaitości X składa się z B czworościanów, które mają razem W wierzchołków, K krawędzi i S ścian (ściany wspólne liczymy raz!), to możemy rozważyć liczbę $\chi(X) = W - K + S - B$.

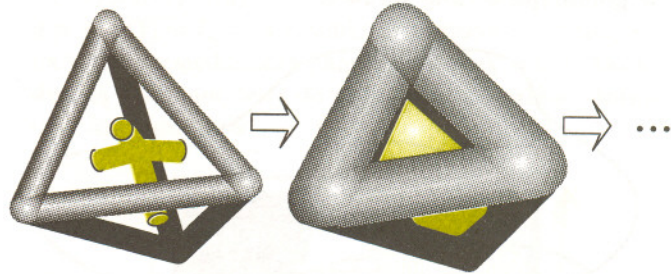
Początek jest obiecujący: można udowodnić, że liczba $\chi(X)$ także w tym przypadku nie zależy od triangulacji X . Czeką nas jednak przykra niespodzianka: funkcja χ tym razem nie spełni naszych oczekiwań. Ma bowiem miejsce następujące twierdzenie: dla dowolnej zwartej rozmaitości trójwymiarowej X zachodzi $\chi(X) = 0$.

Twierdzenie to ma prosty, lecz pomysłowy dowód. Jeszcze raz przydadzą się nam precle. Zauważmy, że każdy z nich, rozważany jako podzbiór \mathbf{R}^3 , ogranicza pewną trójwymiarową figurę, którą będziemy nazywać *pełnym preblem* i oznaczać Q_g . Na przykład, Q_0 jest zwykłą kulą.

Jaka jest charakterystyka Eulera–Poincarégo zbioru Q_g ? Dla kuli Q_0 mamy naturalną triangulację jednym czworościanem, czyli $W = 4$, $K = 6$, $S = 4$, $B = 1$, a stąd $\chi(Q_0) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$. Dla następnych pełnych precli obliczamy indukcyjnie, podobnie jak dla pustych, że $\chi(Q_g) = 1 - g$.

Teraz zauważmy, że każda zwarta i spójna rozmaitość X wymiaru trzy może być przedstawiona jako suma dwóch jednakowych pełnych precli Q_g , przecinających się wzdłuż wspólnego brzegu P_g . Pierwszy z precli Q_g otrzymamy pogrubiając nieco wszystkie krawędzie pewnej triangulacji X . Zauważenie, że to, co zostało z X , jest także pełnym preblem, wymaga nieco spostrzegawczości. Odwołajmy się raz jeszcze do grafu dualnego, odpowiadającego danej triangulacji. Jego pogrubienie jest, oczywiście, pełnym preblem.

W ten sposób umieściliśmy w X dwa rozłączne pełne precle. Wyobraźmy teraz sobie, że je powoli nadmuchujemy i obserwujemy, co się dzieje w jednym z czworościanów triangulacji. Łatwo zauważyć, że po pewnym czasie oba precle zetkną się brzegami, szczelnie wypełniając X . Ponieważ oba precle mają wspólny, a więc taki sam, brzeg, to oba są tej samej postaci Q_g . Tak otrzymany rozkład X znany jest pod nazwą *rozkladu Heegaarda* rozmaitości.



Rys. 7

Rozkład ten pomoże nam obliczyć charakterystykę X . Zauważmy, że jeśli wielościan X jest przedstawiony jako suma swoich dwóch podwielościanów M i L , to $\chi(X) = \chi(M) + \chi(L) - \chi(M \cap L)$. Gdyby $\chi(X)$ oznaczało po prostu liczbę wierzchołków (krawędzi, ścian, itd.), to powyższy wzór byłby oczywisty. Wystarczy teraz zauważyć, że wzór, który chcemy uzasadnić, jest naprzemienną sumą takich oczywistych wzorów.

Zastosujmy ten wzór do rozkladu Heegaarda $X = M \cup L$, gdzie $M = L = Q_g$, $M \cap L = P_g$. Mamy $\chi(X) = \chi(M) + \chi(L) - \chi(M \cap L) = 2\chi(Q_g) - \chi(P_g) = 2(1 - g) - (2 - 2g) = 0$, co należało wykazać.

Reasumując: charakterystyka Eulera–Poincarégo jest bezużyteczna, gdy chcemy rozróżnić rozmaitości trójwymiarowe. Należy szukać innych, skuteczniejszych niezmienników. A może Czytelnicy mają jakieś pomysły?

W chwili pisania tego artykułu problem klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych, czyli opisu możliwych form naszej przestrzeni, był otwarty.