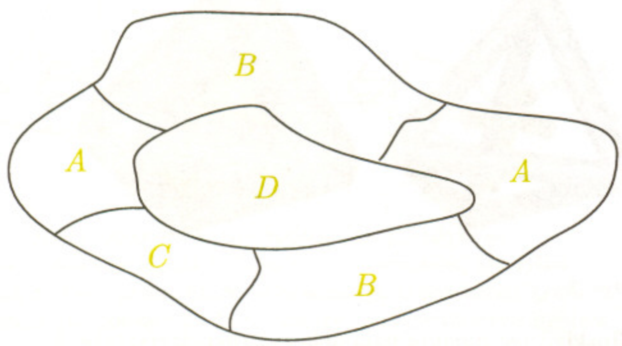
W 1852 roku student londyńskiego University College, Francis Guthrie, powiedział swemu bratu Frederickowi, że jego zdaniem można, używając jedynie czterech barw, pomalować państwa na dowolnej mapie tak, by każde dwa *sąsiednie* (tzn. mające wspólny odcinek granicy) miały różne kolory. Francis zauważył bowiem, że cztery kolory wystarczają, gdy chcemy pokolorować hrabstwa na mapie Anglii. Skoro tak, to dlaczego nie miałyby wystarczyć w dowolnym przypadku, tzn. dla jakiejkolwiek mapy na kartce papieru (czyli na płaszczyźnie) lub na globusie (czyli na sferze)? Gwoli ścisłości przyjmijmy, że granice każdego państwa tworzą *jedną* krzywą zamkniętą (tego warunku nie spełnia np. RPA).

Frederick Guthrie zwrócił się z powyższym problemem do jednego ze swych wykładowców, Augustusa De Morgana. De Morgan udowodnił, że nie ma takiej (płaskiej) mapy, na której znalazłoby się pięć państw parami sąsiednich. Nie jest to jeszcze, niestety, dowód faktu, że nie ma takiej mapy, do której pomalowania trzeba użyć przynajmniej pięciu barw (patrz rys. 1) – i nie wiadomo, czy De Morgan był tego świadom, gdy 23 października 1852 roku pisał list do Hamiltona, wspominając o całej sprawie.



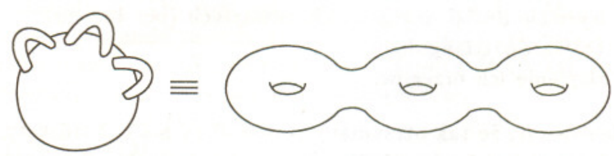
Rys. 1. Na mapie powyżej nie ma czwórki państw parami sąsiednich; mimo to do jej pomalowania trzeba koniecznie użyć czterech barw.

Problem czterech barw stał się na dobre sławny – jak się okazało, na przeciąg z grubsza stu lat – w czerwcu 1878 roku, kiedy to Arthur Cayley opowiedział o nim na posiedzeniu Londyńskiego Towarzystwa Matematycznego (stwierdzając, że sam nie zna rozwiązania). Niedługo potem „dowody" twierdzenia o czterech barwach opublikowali Arthur Bray Kempe, adwokat z zawodu (1879) oraz Peter Guthrie Tait (1880). Obie prace powitano przychylnie i z żywym zainteresowaniem (Kempe został nawet w dowód uznania członkiem Royal Society).

W Anglii lat osiemdziesiątych XIX wieku panowała powszechna wiara, że problem czterech barw został rozwiązany i można co najwyżej uprościć dowód. Wspomnijmy dla przykładu, że w 1887 roku *Journal of Education* opublikował konkurs dyrektora Clifton College na dowód twierdzenia o czterech barwach, nie dłuższy niż trzydzieści linii rękopisu. Wśród wielu innych osób, z własnym „dowodem" pofatygował się nawet biskup Londynu i późniejszy arcybiskup Canterbury, Frederick Temple, który ponoć na nudnych oficjalnych spotkaniach bywał obecny jedynie ciałem.

Gdy zatem w roku 1890 Percy John Heawood znalazł istotny błąd w rozumowaniu Kempego, to pisał o tym w tonie niemal przepraszającym. Krótka, sześciostronicowa praca Heawooda w *Quarterly Journal of Mathematics* zawiera kontrprzykład obalający dowód Kempego, dowód faktu, że dowolną mapę można pomalować co najwyżej pięcioma barwami, i jeszcze jeden zadziwiający rezultat, o którym opowiemy dokładniej.

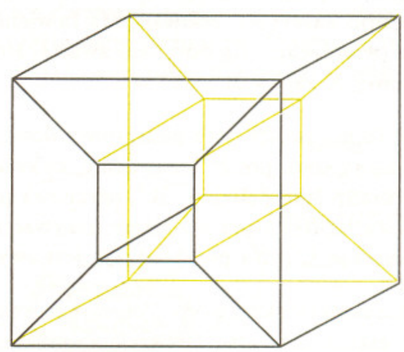
Rozważmy mapy położone na powierzchni P_g (rys. 2) powstającej przez doklejenie do sfery g „rączek". Można równoważnie powiedzieć, że P_g to powierzchnia obwarzanka, w którym piekarz zrobił g dziur.



Rys. 2. Powierzchnia P_g dla $g = 3$.

Liczba g nazywa się fachowo genusem powierzchni P_g. (Więcej na temat dwuwymiarowych powierzchni można przeczytać np. w *Delcie* 6/1995.) Gdyby model powierzchni P_g zrobić z kartonu, klejąc odpowiedni wielościan (dla $g = 1$ może to być np. wydrążony sześcian z rys. 3), to okazałoby się, że liczba K krawędzi tego wielościanu, liczba W jego wierzchołków i liczba S jego ścian spełniają zawsze zależność

(1) $$W - K + S = E = 2 - 2g\,.$$



Rys. 3. Wydrążony sześcian; $W = S = 16$, $K = 32$.

Liczba $E = 2 - 2g$ to tzw. charakterystyka Eulera–Poincarégo powierzchni P_g. Jak się okazuje, zachodzi następujące

Twierdzenie (Heawood, 1890). *Dla $g \geq 1$ dowolną mapę położoną na powierzchni P_g można pomalować używając co najwyżej $h(g)$ barw, gdzie*

$$h(g) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2}\right] = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2}\right].$$

W dowodzie wykorzystamy prosty

Lemat. *Jeśli $g \geq 1$, a liczba państw na mapie M położonej na P_g jest większa od liczby $h(g)$, to istnieje wśród nich państwo graniczące z co najwyżej $h(g) - 1$ innymi.*

Dowód Lematu. Uznajmy, że mapa M położona na powierzchni P_g to zdeformowany wielościenny model powierzchni P_g. Zatem liczba państw S, liczba K granic między sąsiadami i liczba W „wierzchołków" (czyli punktów, gdzie zbiega się kilka różnych granic) spełniają wzór Eulera (1).

Ponieważ (tak samo, jak dla każdego wielościanu!) mamy $3W \leq 2K$, więc z (1) wynika, że $2K \leq 6(S - E)$. Niech α oznacza średnią liczbę sąsiadów państwa na mapie M; wtedy $\alpha S = 2K$ (bowiem mnożąc liczbę państw przez średnią liczbę sąsiadów liczymy dwukrotnie każdą granicę między dwoma państwami). Wynika stąd, że $\alpha S \leq 6(S - E)$, czyli

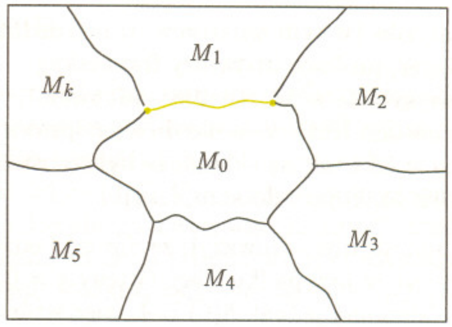
$$\alpha \leq 6\left(1 - \frac{E}{S}\right). \tag{2}$$

Rozważmy trójmian kwadratowy $\phi(x) = x^2 - 7x + 6E$. Ponieważ $E = 2 - 2g \leq 0$, więc ma on dwa rzeczywiste pierwiastki x_1, x_2, przy czym $x_1 > 0$. Posługując się szkolnym wzorem na pierwiastki trójmianu sprawdzamy, że część całkowita x_1 to właśnie dziwna liczba $h(g)$ pojawiająca się w twierdzeniu Heawooda. Warunek $\phi(x_1) = 0$ zapiszmy w postaci

$$x_1 - 1 = 6\left(1 - \frac{E}{x_1}\right). \tag{3}$$

Z założenia $S > h(g) = [x_1]$, zatem $S > x_1$ (S jest liczbą naturalną!), a ponieważ $E \leq 0$, więc mamy $-E/S \leq -E/x_1$. Z warunków (2) i (3) otrzymujemy teraz nierówność $x_1 - 1 \geq \alpha$, a stąd $[x_1] - 1 = h(g) - 1 \geq [\alpha]$. Jednakże na mapie M istnieje, oczywiście, państwo mające co najwyżej $[\alpha]$ sąsiadów – to spostrzeżenie kończy dowód lematu. ■

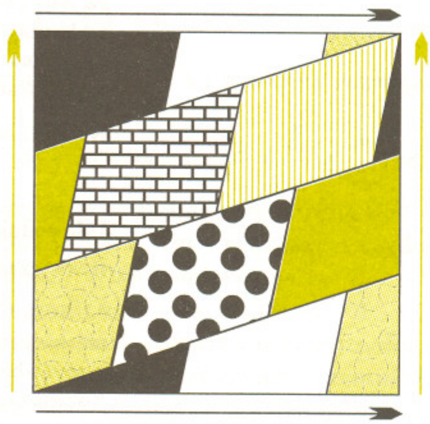
Dowód twierdzenia prowadzimy przez indukcję względem liczby państw S. Teza jest oczywista dla $S \leq h(g)$ – można po prostu każde państwo pomalować innym kolorem. Załóżmy więc, że twierdzenie zachodzi dla pewnego $S \geq h(g)$ i rozpatrzmy mapę M, na której jest $S + 1$ państw. Z Lematu wynika, że istnieje wśród nich państwo M_0, które ma najwyżej $h(g) - 1$ sąsiadów (rys. 4).



Rys. 4. Fragment mapy M; $k \leq h(g) - 1$.

Połączmy na chwilkę M_0 z jednym z jego sąsiadów, np. M_1, tzn. zapomnijmy o istnieniu jednej granicy (zaznaczonej kolorem na rys. 4) na wyjściowej mapie M. Nową mapę, złożoną z S państw, dzięki założeniu indukcyjnemu można pomalować co najwyżej $h(g)$ barwami. Jednak do kolorowania sąsiadów państwa M_0 użyliśmy w najgorszym razie $h(g) - 1$ barw – możemy teraz przypomnieć sobie o granicy między państwami M_0 i M_1 i pokolorować M_0 tą spośród $h(g)$ barw, która nie została użyta do kolorowania żadnego państwa sąsiedniego. ■

Co ciekawe, okazuje się, że oszacowania Heawooda nie da się już poprawić: dla każdego $g \geq 1$ można wskazać taką mapę na powierzchni P_g, do której pomalowania nie wystarczy $h(g) - 1$ barw. Np. dla torusa mamy $g = 1$, $h(1) = 7$, a na rysunku 5 pokazana jest mapa na torusie z siedmioma państwami – jak widać, każde dwa są sąsiednie, więc do pomalowania trzeba istotnie użyć siedmiu barw.



Rys. 5. Mapa na torusie z siedmioma parami sąsiadującymi państwami (widok na pasku papieru, z którego sklejamy torus zgodnie z narysowanymi strzałkami). Realistyczny (w trójwymiarowej przestrzeni) rysunek pomalowanego siedmioma barwami torusa jest na okładce.

Powyższy przykład pochodzi od Heawooda, który stwierdził nonszalancko, że podobne można znaleźć dla wszystkich genusów g. Zaopatrzenie akurat tego twierdzenia w dowód okazało się nieporównanie trudniejsze: o tym, że Heawood istotnie miał rację, wiadomo było dopiero w końcu lat 60. XX wieku, dzięki zbiorowym długoletnim wysiłkom wielu matematyków (w tym amatorów: w lutym 1968 roku Jean Mayer, profesor literatury francuskiej na Uniwersytecie w Montpellier, udowodnił, że oszacowania Heawooda nie da się poprawić dla genusu $g = 59$ i tak się składa, że był to ostatni przypadek brakujący do kompletu).

Każdy niewątpliwie zauważył, że dowód Lematu załamuje się w przypadku sfery (wtedy $g = 0$, $E = 2$). Niemniej jednak $h(0) = 4$, więc wzór Heawooda podaje odpowiednią liczbę barw także w przypadku sfery! Można tak mówić bez obawy, bowiem twierdzenie o czterech barwach udowodnili ostatecznie w 1976 roku (po sześcioletniej współpracy) Kenneth Appel i Wolfgang Haken. Ich dowodu nie może w rozsądnym czasie sprawdzić „ręcznie" żaden śmiertelnik: nie dość, że jego ostateczna wersja zajmuje ponad sto stron tekstu i czterysta mikrofilmów z rysunkami, to do sprawdzenia kilku tysięcy różnych przypadków Haken i Appel użyli programu komputerowego, który na dużej maszynie działał kilkaset godzin. A swoją drogą, to zadziwiające, że twierdzenie o kolorowaniu map jest tak proste w dowodzie dla torusa i tak zawiłe dla sfery.

Miłośnicy wzoru Eulera mogą spróbować samodzielnie wymyślić (niedługi i prosty!) dowód faktu, że każdą mapę na płaszczyźnie lub sferze można pomalować co najwyżej sześcioma barwami. Na początek należy zauważyć, że bez zmniejszenia ogólności można przyjąć, iż w jednym punkcie mapy zawsze zbiegają się najwyżej trzy różne granice.

Znaczenie wyniku Appela i Hakena jest dwojakie. Po pierwsze, rozwiązali oni sławny problem, który przez ponad sto lat był otwarty. Po drugie, ich praca zmusza matematyków do ponownego rozważenia pytań *Co to jest dowód?* i *Czy każdy dowód można zrozumieć i sprawdzić?*. A kartografowie najwyraźniej i tak się twierdzeniem o czterech barwach nie przejmują: w nowej sześciotomowej encyklopedii PWN województwa na mapach Polski z różnych lat kolorowane są zawsze przynajmniej pięcioma barwami...

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 807. Czy dwa równoległościany (niekoniecznie przystające) mogą mieć tę własność, że każda ściana jednego z nich ma z każdą ścianą drugiego pewien punkt wspólny (nie leżący na żadnej z krawędzi obu równoległościanów)?
Rozwiązanie na str. 9

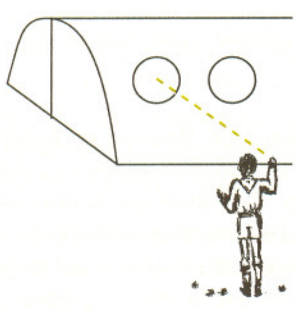
M 808. Niech

$$a_n = \sin\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{2\pi}{2^n}\sin\frac{3\pi}{2^n}\ldots\sin\frac{(2^n-1)\pi}{2^n}.$$

Udowodnić, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{2^{-n}}$ istnieje i obliczyć jej wartość.
Rozwiązanie na str. 9

M 809. Czy każdej dodatniej liczbie rzeczywistej α można przyporządkować nieskończony podzbiór A_α zbioru liczb naturalnych w taki sposób, by dla dowolnych $\alpha \neq \beta$ zbiór $A_\alpha \cap A_\beta$ był skończony?
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Piotr ZALEWSKI



F 451. Harcerz rzuca z całej siły szyszkami do otwartego, okrągłego okienka namiotu-hangaru z odległości kilku metrów. Średnio co druga szyszka wpada do środka. Co która szyszka (średnio) omijałaby cel, gdyby chłopiec podszedł dwa razy bliżej, jeżeli przyjąć, że harcerz celuje w środek okienka, zamierzony kierunek rzutu jest prostopadły do płaszczyzny okienka, a rozrzut kątowy wokół tego kierunku w dowolnej płaszczyźnie go zawierającej podlega rozkładowi normalnemu.
Rozwiązanie na str. 12

F 452. Jednorodny sztywny pręt o masie m jest podparty na dwóch końcach. Obliczyć siłę reakcji podpory w momencie usunięcia drugiego punktu podparcia. Tarcie i grubość pręta zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 8