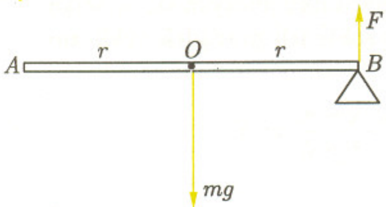
Domki i studnie

Rozwiązanie zadania F 452.
W momencie usunięcia podparcia w punkcie A na pręt działają: siła ciężkości mg zaczepiona w środku ciężkości O i siła reakcji F zaczepiona w punkcie B.



Możemy wypisać następujące równania Newtona w inercjalnym układzie odniesienia związanym z punktem B. Dla ruchu postępowego środka ciężkości

$$ma = mg - F\,,$$

oraz dla ruchu obrotowego wokół punktu podparcia B

$$I \cdot a/r = mg \cdot r\,,$$

gdzie $I = 4/3mr^2$ jest momentem bezwładności pręta o długości $2r$ względem jego końca. Po prostym rachunku otrzymujemy $F = mg/4$.

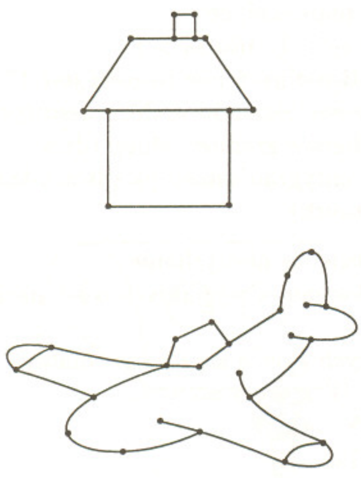
Zacznijmy od przypomnienia dwóch starych jak świat łamigłówek. W pierwszej z nich mowa jest o trzech studniach i trzech domkach; chodzi o to, by każdy domek połączyć drogą z każdą studnią spełniając jednocześnie kaprys właścicieli: mianowicie, różne drogi nie mogą się przecinać.

W drugiej łamigłówce nie ma studni, a domków jest za to pięć. Tym razem rozwiązujący ma wymyślić sposób połączenia domków ścieżkami tak, by każde dwa były połączone bezpośrednio (tzn. żeby można było pomaszerować z każdego domku do dowolnego innego, nie odwiedzając po drodze pozostałych). Jak poprzednio, ścieżki nie mogą się przecinać.

Nieomal każdy, kto słyszy jedną z tych łamigłówek po raz pierwszy, bierze kartkę papieru i ołówek, by po kilku próbach stwierdzić, że *tego się nie da narysować*. Rzeczywiście, z początku drogi rysuje się gładko, lecz zawsze okazuje się, że ostatniej, brakującej do rozwiązania łamigłówki, nijak na kartce papieru umieścić nie można, o ile nie chcemy przecinać wcześniej narysowanych. Jeśli ktoś nigdy jeszcze nie próbował, niech się przekona „własnoręcznie".

No dobrze, ale przecież – zarówno w matematyce, jak i poza nią – seria niepowodzeń to wcale jeszcze nie dowód na to, że czegoś istotnie zrobić nie można. Ścisłe uzasadnienie faktu, że żadna ze wspomnianych łamigłówek nie ma rozwiązania, podamy wykorzystując wzór Eulera.

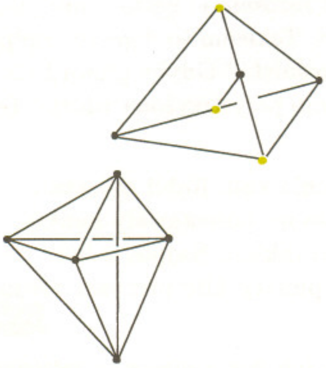
Przypuśćmy, że na płaszczyźnie mamy tzw. *graf*, to znaczy pewną liczbę kropek połączonych nie przecinającymi się kreskami. Załóżmy w dodatku, że z każdej kropki do każdej innej można przewędrować po narysowanych kreskach (intuicyjnie znaczy to tyle, że graf składa się z jednego tylko kawałka, a nie, na przykład, z dwóch czy trzech położonych z dala od siebie). Mówi się wówczas, że graf jest *spójny*. Wzór Eulera orzeka, że w takiej sytuacji liczba kropek W, liczba kresek K i liczba S części, na które graf dzieli płaszczyznę, spełniają zależność $W - K + S = 2$. Przykłady pokazane są na rysunku 1, a jeśli komuś nie chce się czytać (niezbyt trudnego) dowodu, który można znaleźć np. w *Delcie* 5/1996, to niech przynajmniej narysuje na kartce papieru kilka innych grafów spójnych i sprawdzi dla nich zależność między liczbami W, K i S.



Rys. 1. Dla grafu u góry (domek) mamy $S = 4$, $W = 12$, $K = 14$; dla grafu u dołu (samolot) mamy $S = 6$, $W = 23$, $K = 27$.

W pierwszym zadaniu mamy $W = 3 + 3 = 6$, $K = 3 \cdot 3 = 9$ (bo każdy domek ma być połączony z każdą studnią). Ze wzoru Eulera wynika więc, że powinno być $S = 5$. Gdyby udało się nam zrobić rysunek rozwiązujący łamigłówkę, to każda z tych pięciu części płaszczyzny byłaby ograniczona przynajmniej czterema kreskami. (Dwie lub trzy kreski to jeszcze za mało, bo w pierwszym przypadku musielibyśmy mieć dwie różne drogi z pewnego domku do pewnej studni, a w drugim – dwie studnie lub dwa domki połączone bezpośrednią drogą; żadnej z tych możliwości warunki zadania nie przewidują.) Skoro tak, to wszystkich kresek jest przynajmniej $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ (dzielimy przez 2, bo każda kreska jest wspólna dla dwóch części płaszczyzny), czyli za dużo! Ta sprzeczność dowodzi, że zadania o studniach i domkach istotnie rozwiązać się nie da.

W drugim zadaniu mamy $W = 5$ oraz $K = (5 \cdot 4) : 2 = 10$ (bo każdy z pięciu domków ma być połączony z każdym z czterech pozostałych i żadnej kreski–ścieżki nie chcemy liczyć dwa razy). Powinno więc być $S = 2 + K - W = 7$. Jeśliby się udało narysować odpowiedni graf, to każda z tych siedmiu części miałaby brzeg złożony tym razem z trzech kresek (wynika to z faktu, że każde dwa domki są połączone ścieżką). Licząc, jak poprzednio, kreski na nowo, otrzymujemy $K = (7 \cdot 3) : 2 = 10\frac{1}{2}$, a to jest sprzeczność.

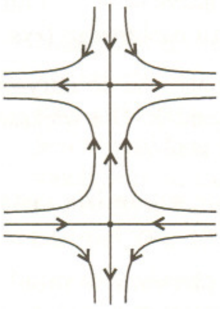


Rys. 2. Dla sześciościanu z przekątną mamy $W = 5$, $K = 10$, a dla czworościanu z dodaną osią symetrii $W = 6$, $K = 9$.

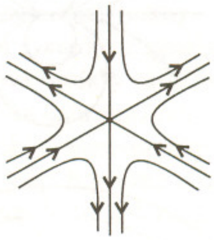
Zamiast przypominać łamigłówki dobrze znane, powie może ktoś z Czytelników, lepiej byłoby dać w prezencie najmłodszym miłośnikom *Delty* nową łamigłówkę tego rodzaju, żeby znowu mogli zabłysnąć na najbliższych imieninach Cioci czy też kółku matematycznym (niepotrzebne skreślić). Okazuje się, że istotnie nowej łamigłówki polegającej na zmuszaniu kogoś do rysowania płaskiego grafu, którego się narysować nie da, wymyślić nie można. Nie wynika to wcale z lenistwa redakcji (którego staramy się Czytelnikom nie pokazywać), lecz z twierdzenia, które Kazimierz Kuratowski udowodnił w 1930 roku: *każdy graf niespłaszczalny zawiera jeden z dwóch fragmentów pokazanych na rysunku* 2. Nie trzeba wiele sprytu, by na tym rysunku zauważyć opisane wyżej studnie i domki.

Rozwiązanie dla Kubusia

Wytnijmy fragment torusa zawierający dwa punkty osobliwe:



Zmieniając zaczesanie możemy te dwa punkty osobliwe zdeformować do jednego (o indeksie -2).



Rozwiązanie zadania M 807. Przypuśćmy, że dwa równoległościany o szukanej własności istnieją. Wtedy każda ze ścian pierwszego z nich dawałaby w przecięciu z każdą ze ścian drugiego z nich odcinek. Część wspólna M obu równoległościanów jest wielościanem wypukłym (bo jest przecięciem dwóch wielościanów wypukłych) o dwunastu ścianach (leżących w płaszczyznach ścian obu równoległościanów). Liczba K krawędzi wielościanu M, na mocy poczynionej wyżej obserwacji, spełnia warunek $K \geq 6 \cdot 6 = 36$. Ze wzoru Eulera otrzymujemy liczbę wierzchołków

$$W = 2 + K - S = K - 10 = \frac{2}{3}K + \frac{1}{3}(K - 30) > \frac{2}{3}K.$$

Jednakże prowadzi to do sprzeczności, bo każda krawędź ma za końce dwa wierzchołki, a w każdym wierzchołku schodzą się co najmniej trzy krawędzie, czyli $3W \leq 2K$. Sytuacja, o którą pytaliśmy w zadaniu, nie może więc zachodzić.

A co będzie, jeśli zażądamy jedynie, by każda ściana pierwszego równoległościanu miała z każdą ścianą drugiego punkt wspólny (być może leżący na krawędzi jednego z równoległościanów)? Kwestię tę pozostawiamy do rozstrzygnięcia Wnikliwym Czytelnikom ufnie prosząc o nadsyłanie rozwiązań, bo zagadnienie wielce nas nurtuje.

Rozwiązanie zadania M 808. Skorzystamy ze wzorów $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ oraz $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Ponieważ

$$a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin\left(2 \cdot \frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{2^n-1} 2\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= 2^{2^n-1} \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin\frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot 1 \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \cos\frac{k\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= 2^{2^n-1} \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin\frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot \sin\frac{2^n\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1} \sin\frac{k\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= 2^{2^n-1} a_{n+1},$$

więc $a_n \cdot 2^{2^n-n} = a_{n+1} \cdot 2^{2^{n+1}-(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej n. Zatem ciąg $b_n = a_n \cdot 2^{2^n-n}$ jest stały i dlatego

$$a_n = 2^{n-2^n} \cdot a_1 \cdot 2^{1-2^1} = 2^{n-2^n-1}.$$

Stąd $(a_n)^{2^{-n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(n-1)/2^n}$, toteż szukana granica istnieje i jest równa $\frac{1}{2}$.

Uwaga. W podobny sposób dowodzi się, że $\int_0^\pi \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2$.