Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1997

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 225 (WT=2,89), 226 (WT=3,23)
z numeru 10/1996

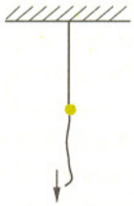
Aleksander Surma	– Myszków	44,20
Przemysław Gworys	– Częstochowa	43,67
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	34,14
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	31,28
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	12,49

Zdobywając 44 punkty po raz trzeci pan Surma zostaje czwartym Weteranem **Klubu 44 F.**

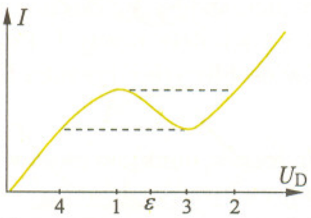
Zadania z fizyki nr 239, 240

Redaguje Jerzy B. BROJAN

239. Na nici o długości 40 cm (długość w stanie nie napiętym) wisi ciężarek o masie 2 kg, do którego od dołu przywiązany jest luźny odcinek takiej samej nici o długości 30 cm. Z jaką prędkością powinien się przesuwać w dół ruchem jednostajnym dolny koniec tego odcinka (rys. 1), aby w następstwie jego napięcia
a) zerwaniu uległ tylko dolny odcinek nici,
b) zerwaniu uległy oba odcinki (gdy ciężarek znajdował się ponad końcem poruszającym się jednostajnie)?
Wytrzymałość nici wynosi 50 N, a maksymalna rozciągliwość – 8%, przy czym zakładamy, że wydłużenie jest proporcjonalne do siły napinającej aż do chwili zerwania.



Rys. 1



Rys. 2

240. Wysyłający światło punkt porusza się z prędkością v_1 i przecina oś optyczną soczewki pod kątem α_1, a w tym momencie obraz tego punktu przecina oś pod kątem α_2. Z jaką prędkością v_2 porusza się obraz?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1997

Przypominamy treść zadań:

231. Jacek siedzi na lekkiej huśtawce w odległości 2 m od punktu podparcia, a Marek zeskakuje z pewnej wysokości na drugie ramię huśtawki. W jakiej odległości od punktu podparcia powinien zeskoczyć, aby Jacek wzbił się jak najwyżej? Marek waży trzy razy więcej od Jacka, a huśtawka jest doskonale sprężysta.

232. Na rysunku 2 przedstawiona jest charakterystyka diody tunelowej w kierunku przewodzenia. Diodę tę włączono w obwód zawierający źródło napięcia $\mathcal{E}$ i cewkę o indukcyjności L, przy czym wartość napięcia $\mathcal{E}$ leży w opadającym obszarze charakterystyki (została zaznaczona na rys. 2). Opisać jakościowo procesy zachodzące w obwodzie po zamknięciu klucza.

231. Jacek osiągnie maksymalną wysokość wtedy, gdy Marek się zatrzyma, a energia kinetyczna będzie zachowana, tzn.

$$\frac{1}{2}m_J v_J^2 = \frac{1}{2}m_M v_M^2 .$$

Ponadto podczas uderzenia Marka w huśtawkę wielkością zachowaną jest moment pędu chłopców względem punktu podparcia (ze względu na krótki czas można pominąć na tym etapie rolę siły ciężkości). Stąd wynika drugie równanie

$$m_J v_J r_J = m_M v_M r_M ,$$

gdzie r_J i r_M oznaczają odległości Jacka i Marka od punktu podparcia. Obliczamy $r_M = r_J\sqrt{m_J/m_M} = 2/\sqrt{3}\ \mathrm{m} = 1{,}15\ \mathrm{m}$.

232. Napięcie źródła $\mathcal{E}$ jest sumą napięć na cewce i diodzie: $\mathcal{E} = U_L + U_D$, przy czym $U_L = L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$. Początkowo I oraz U_D są małe, więc natężenie prądu rośnie w przybliżeniu liniowo. W miarę zbliżania się do maksimum charakterystyki U_D rośnie, a U_L maleje, czyli I narasta wolniej, jednak $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ nie maleje do zera. Gdy U_D osiąga wartość odpowiadającą maksimum charakterystyki (punkt 1), prąd nie może nadal rosnąć i jedynym rozwiązaniem jest przeskok na prawą stronę charakterystyki – do punktu 2. Teraz $U_D > \mathcal{E}$, więc $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$ i następuje stopniowe przejście do punktu 3 charakterystyki, a dalej – podobnie jak poprzednio – wnioskujemy, że tylko przeskok do punktu 4 zapewnia niesprzeczność równań. Cykl 1-2-3-4 się powtarza.

Rozwiązanie zadania F 451.
Wybierając parę prostopadłych płaszczyzn, których częścią wspólną jest zamierzony kierunek rzutu i oznaczając kąty rozrzutu leżące na tych płaszczyznach przez α i β możemy zapisać, że prawdopodobieństwo trafienia wynosi

$$P(R) = \int\limits_{\text{okienko}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} ,$$

gdzie zależność od odległości od okienka R jest ukryta w zależności granic całkowania od R. Przechodząc w płaszczyźnie okienka o promieniu $r \ll R$ do współrzędnych biegunowych ρ, ϕ otrzymujemy ($\alpha = \rho/R\cos\phi$, $\beta = \rho/R\sin\phi$, $\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \rho/R\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

$$P(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \int_0^{r} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{R^2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2R^2}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2R^2}} .$$

Prawdopodobieństwo chybienia wynosi $Q(R) = 1 - P(R)$. W takim razie jeżeli $Q(R) = 1/2$, to

$$Q(R/2) = \mathrm{e}^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}\left(\frac{2}{R}\right)^2} = Q(R)^4 = \frac{1}{16} .$$

Czyli po podejściu dwa razy bliżej harcerz będzie chybiał średnio co 16 rzut.

Zadania z matematyki nr 341, 342

Redaguje Marcin E. KUCZMA

341. Na każdym polu szachownicy prostokątnej o wymiarach $m \times n$ leży kartonik pomalowany z jednej strony na żółto, a z drugiej na niebiesko. Wykonujemy serię ruchów. W każdym ruchu wybieramy jedno pole, po czym przewracamy na drugą stronę leżący na nim kartonik, a także wszystkie inne kartoniki znajdujące się w rzędzie poziomym i w rzędzie pionowym przechodzącym przez wybrane pole. W chwili początkowej cała szachownica jest żółta. Udowodnić, że stosując opisaną procedurę można doprowadzić do tego, by cała szachownica stała się niebieska oraz obliczyć minimalną liczbę ruchów, która jest do tego konieczna.

342. Wielościan wypukły W nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1. Dowieść, że wielościan W jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż 8.

Zadanie **342** zaproponował pan Wojciech Martys ze Stalowej Woli.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1997

Przypominamy treść zadań:

333. Zbiorem „klubowym" będziemy nazywali 44-elementowy zbiór K liczb całkowitych mający następującą własność: suma liczb w każdym niepustym podzbiorze zbioru K jest niepodzielna przez 45. Ile jest zbiorów klubowych zawartych w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 1997\}$?

334. Dla każdej liczby naturalnej n szereg $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ jest zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez S_n. Dowieść, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

333. Weźmy zbiór klubowy K, ustawmy jego elementy w ciąg $x_1, \ldots, x_{44}$ i przyjmijmy oznaczenie: $s_k = x_1 + \ldots + x_k$ dla $k = 1, \ldots, 44$. Z określenia zbioru klubowego wynika, że liczby s_k są niepodzielne przez 45 oraz że jeśli $1 \le k < m \le 44$, to różnica $s_m - s_k$ nie dzieli się przez 45. Zatem ciąg $((s_k \bmod 45)\colon\ k = 1, \ldots, 44)$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, 44\}$.

Zamieniamy teraz elementy x_1 i x_2 miejscami; to znaczy, ustawiamy elementy zbioru K w ciąg $x_1', \ldots, x_{44}'$, gdzie $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$, $x_j' = x_j$ dla $j > 2$, i tworzymy sumy $s_k' = x_1' + \ldots + x_k'$. Także i ciąg $((s_k' \bmod 45)\colon\ k = 1, \ldots, 44)$ jest permutacją zbioru $\{1, \ldots, 44\}$. A ponieważ $s_1 = x_1$, $s_1' = x_2$ oraz $s_k = s_k'$ dla $k \ge 2$, wnosimy stąd, że $x_1 \equiv x_2 \pmod{45}$.

Ustawienie zbioru K w ciąg było dowolne; x_1, x_2 mogły być dowolnymi elementami K. Zatem wszystkie liczby w zbiorze K dają przy dzieleniu przez 45 jednakową resztę r. Ta reszta jest względnie pierwsza z 45; w przeciwnym razie dałoby się ze zbioru K wybrać podzbiór o sumie elementów podzielnej przez 45.

Na odwrót, każdy zbiór K złożony z 44 liczb $x_1 \equiv \ldots \equiv x_{44} \pmod{45}$, względnie pierwszych z 45, spełnia warunek definiujący zbiory klubowe.

Wśród liczb od 1 do 44 są dwadzieścia cztery liczby $r_1, \ldots, r_{24}$ względnie pierwsze z 45 (nie będziemy ich tu wypisywać – łatwo sprawdzić, że tak jest). Niech

$$M_i = \{x \in \{1, 2, 3, \ldots, 1997\}\colon\ \ x \equiv r_i \pmod{45}\}.$$

Każdy 44-elementowy podzbiór któregokolwiek ze zbiorów M_i jest zbiorem klubowym, i są to już wszystkie zbiory klubowe, jakich szukamy. Pozostaje je policzyć.

Zbiór M_i ma 45 elementów, gdy $r_i \le 17$, natomiast 44 elementy, gdy $r_i > 17$. Wśród reszt r_i jest dziesięć liczb ≤ 17 oraz czternaście liczb > 17. Zatem z każdego zbioru M_i pierwszego typu można wybrać zbiór klubowy K na 45 sposobów, podczas gdy w każdym zbiorze M_i drugiego typu jedynym podzbiorem klubowym jest cały zbiór M_i. Stąd wynik: liczba rozpatrywanych zbiorów klubowch wynosi $10 \cdot 45 + 14 \cdot 1$, czyli 464.

334. Ustalmy liczbę naturalną $n \ge 1$ i przyjmijmy $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{n+k}$ (szereg zbieżny dla $-1 < x < 1$); wówczas

$$S_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n f\left(\frac{n}{n+1}\right). \tag{1}$$

Ponieważ $f(0) = 0$ oraz $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{n+k-1} = \frac{x^{n-1}}{1-x}$, zatem dla każdej liczby $w \in (-1; 1)$ mamy $f(w) = \displaystyle\int_0^w \frac{x^{n-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$. Całkowanie przez części, a następnie przez podstawienie $y = \dfrac{x}{n(1-x)}$, daje wynik:

$$f(w) = \frac{w^n}{n(1-w)} - \int_0^w \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{n(1-x)^2} = \frac{w^n}{n(1-w)} - \int_0^v \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n \mathrm{d}y,$$

gdzie $v = \dfrac{w}{n(1-w)}$. W otrzymanym wzorze kładziemy $w = \dfrac{n}{n+1}$ (wtedy $v = 1$):

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} - \int_0^1 \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n \mathrm{d}y.$$

Stąd wobec równości (1):

$$S_n = \frac{n+1}{n} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \int_0^1 \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Ciąg funkcji $g_n(y) = (ny)^n(ny+1)^{-n}$ jest w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ zbieżny monotonicznie do funkcji

$$h(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/y} & \text{dla } \ y > 0, \\ 0 & \text{dla } \ y = 0, \end{cases}$$

a wartości wszystkich tych funkcji są wspólnie ograniczone przez 1. Równość (2) daje więc w granicy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \mathrm{e} \cdot \int_0^1 h(y)\,\mathrm{d}y$$

(wartość całki skończona). Dowodzi to zbieżności ciągu (S_n).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 325 (WT=2,56), 326 (WT=1,58), z numeru 9/1996

Lesław Skrzypek	– Rzeszów	46,12
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	40,70
Piotr Żmijewski	– Łódź	39,15
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	36,33
Jarosław Łazuka	– Warszawa	33,94

Weteran Lesław Skrzypek, autor licznych zadań ligowych, kończy czwartą rundę. Gratulacje!