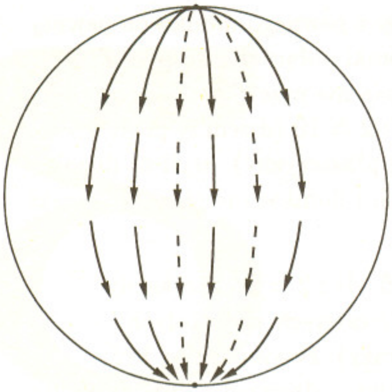
Charakterystyka Eulera, czyli jak się uczesać

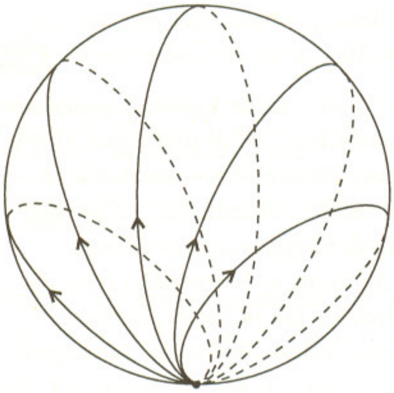
Mały Kubuś był zawsze przesadnie pedantyczny. Wszystkie książki musiały być równo ułożone, zeszyty i długopisy również. Nawet klocki porozrzucane na podłodze czym prędzej układał w rządki. Był jednak jeden problem, z którym nie potrafił sobie poradzić. Miał równo przystrzyżone, krótkie, proste włosy i ilekroć starał się je uczesać, na czubku głowy pozostawał punkt, z którego włosy rozchodziły się w każdym kierunku. Wymyślił co prawda, że gdyby czesać się do tyłu, to problem by znikł, ale czesać się do tyłu po prostu nie chciał. Problem nurtował go na tyle, że zaczął na jego temat fantazjować.

Mam wujka – myślał Kubuś – ten to dopiero jest zarośnięty: gęsta czupryna, wąsy, broda, całe policzki, no i te krzaczaste brwi. Takiemu to dopiero trudno jest się uczesać. A gdyby tak cała głowa była porośnięta? Gdyby głowa była kulą, na której rosłyby gęste, proste, krótkie, równo przystrzyżone włosy? Teraz nawet czesanie do tyłu nic by nie dało!

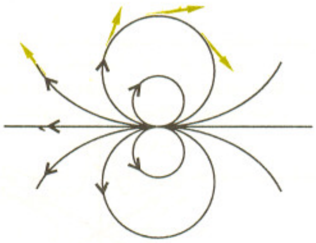
Z wypiekami na twarzy Kubuś zabrał się do czesania kuli. Robił mnóstwo rysunków (włoski rysował ołówkiem na piłce) i zawsze pozostawały punkty, z których włosy rozchodziły się we wszystkich kierunkach. Najpierw był przekonany, że muszą być co najmniej dwa takie punkty. Oto pierwszy rysunek Kubusia – rysunek 1.


Rys. 1

Z jednego punktu na sferze włoski wychodzą, a w drugim punkcie się schodzą. Po pewnym czasie Kubuś odkrył, ku swojemu zdziwieniu, że można tak zaczesać kulę, aby był tylko jeden punkt *osobliwy* (tak Kubuś nazwał punkty, w których włoski nie układały się w jednym kierunku). Oto drugi rysunek Kubusia – rysunek 2.


Rys. 2

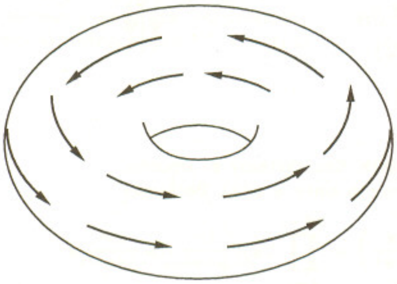
Włoski układają się wzdłuż narysowanych linii. Na oddzielnej kartce narysował, co się dzieje w pobliżu punktu osobliwego (rys. 3).


Rys. 3

Włoski są tak ułożone, że są styczne do narysowanych linii i układają się w kierunku narysowanych strzałek. Dla większej przejrzystości Kubuś zaznaczył na rysunku cztery włoski na kolorowo.

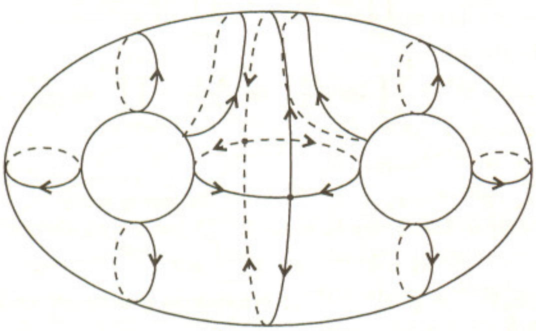
Tak – pomyślał – udało mi się wprawdzie zastąpić dwa punkty osobliwe jednym, ale za to jest on tak jakby dwa razy bardziej skomplikowany.

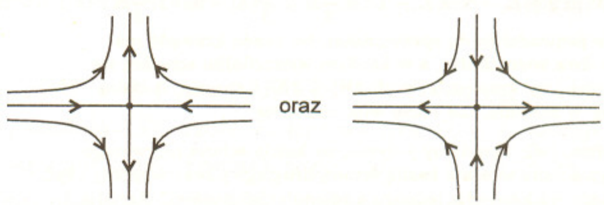
Zapomniawszy, co było jego pierwotnym problemem, zaczął fantazjować dalej. Czy można zaczesać torus? Tak, i to bez żadnych punktów osobliwych! Rozwiązanie znalazł bez większych problemów i przedstawił je na kolejnym rysunku (rys. 4).


Rys. 4

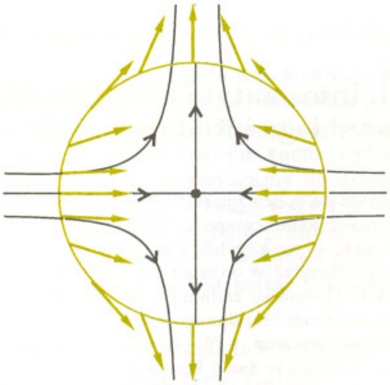
Torusa z dwiema dziurami (rys. 5) nie udało mu się już zaczesać bez powstawania punktów osobliwych.

Jak poprzednio, dla większej wyrazistości, punkty osobliwe na torusie z dwiema dziurami Kubuś przedstawił na dodatkowym rysunku (rys. 6.).


Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Tutaj, podobnie jak w przypadku kuli, mamy dwa punkty osobliwe, lecz są one „innego typu” niż te na kuli.

Coraz to nowsze pytania nurtowały Kubusia. Jak rozróżniać „typy” punktów osobliwych? Co to znaczy, że jeden punkt osobliwy jest „bardziej skomplikowany” niż inny? Jaki jest związek między liczbą dziur w torusie, liczbą punktów osobliwych i tym, jak bardzo są one skomplikowane? Wszystko to wydawało mu się bardzo trudne, był jednak przekonany, że jakiś związek istnieje, a dokładniej, że istnieje zależność dająca się wyrazić prostym wzorem. Aby móc taką zależność znaleźć, trzeba najpierw wyrazić liczbowo, na ile dany punkt osobliwy jest skomplikowany – rozumował Kubuś. Po dłuższym zastanowieniu doszedł do wniosku, że da się to wyrazić poprzez *indeks punktu osobliwego*, który zdefiniował w sposób następujący.

Narysujmy bardzo mały okrąg o środku w punkcie osobliwym. Na tym okręgu są jakoś położone włoski (na rys. 7 włoski są kolorowe).

Gdy poruszamy się po okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to włoski wyrastające z okręgu zmieniają swój kierunek obracając się. Gdy obejdziemy okrąg dookoła w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to włoski leżące na okręgu wykonają pewną liczbę pełnych obrotów. Kubuś zdefiniował *indeks punktu osobliwego* jako ową liczbę obrotów wykonanych przez włoski, przy czym bierzemy ją ze znakiem +, gdy włoski obróciły się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i ze znakiem −, gdy obróciły się w kierunku zgodnym ze wskazówkami. Wszystko to jest dosyć skomplikowane; aby lepiej zrozumieć, o co w tej definicji chodzi, popatrzmy na przykłady. Każdy z punktów osobliwych z rysunku 1 ma indeks równy 1. Punkt osobliwy z rysunku 3 ma indeks 2. Każdy z punktów osobliwych z rysunku 6 ma indeks −1.

Następnie Kubuś empirycznie sprawdził, że suma indeksów punktów osobliwych nie zależy od sposobu zaczesania! I tak, na przykład, na rysunku 1 mamy dwa punkty osobliwe o indeksie 1, co daje w sumie 2, a na rysunku 2 mamy jeden punkt osobliwy o indeksie 2. Na rysunku 5 mamy dwa punkty osobliwe, każdy o indeksie −1. Można jednak zaczesać torus z dwiema dziurami tak, aby był tylko jeden punkt osobliwy – o indeksie −2 (jak to zrobić? rozwiązanie jest gdzieś w tym numerze *Delty*). Kubuś sprawdził wiele innych przykładów i zawsze okazywało się, że suma indeksów punktów osobliwych nie zależy od sposobu zaczesania. Minęło parę lat.

Ciekawe, ile wynosi suma indeksów punktów osobliwych – zastanawiał się Kuba podczas lektury bieżącego numeru *Delty*. Znalazł w nim wzór Eulera i ku swojemu zaskoczeniu odkrył, że

> *suma indeksów punktów osobliwych na torusie z n dziurami jest stała, niezależna od sposobu zaczesania i jest równa charakterystyce Eulera torusa z n dziurami.*

Oczywiście, sfera to torus z 0 dziurami, czyli – mówiąc po ludzku – bez dziur.

Czy umiesz zaczesać torus z n dziurami? A czy umiesz go zaczesać w taki sposób, aby był tylko jeden punkt osobliwy? Jeśli udało Ci się go zaczesać, to oblicz, jaka jest suma indeksów punktów osobliwych i sprawdź, że jest ona równa charakterystyce Eulera torusa z n dziurami.

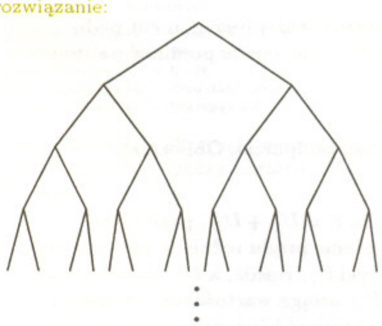
Mimo że odkrył ten wzór, nie potrafił go udowodnić. Z czasem dowiedział się, że jest to tak zwany wzór Hopfa–Poincarégo. Oczywiście, matematycznie precyzyjne sformułowanie wymaga rozwinięcia dosyć trudnego aparatu pojęciowego, ale to już temat na głębsze dyskusje. Dlatego też, chcąc dogłębnie zrozumieć twierdzenie Hopfa–Poincarégo, Kuba zaczął studiować matematykę na uniwersytecie. Tam też dowiedział się, że Hopf uogólnił ten wzór na wielowymiarowe powierzchnie. Czy też chcecie się dowiedzieć, jak się formułuje to uogólnienie? Pójdźcie śladem Kuby…

Rozwiązanie zadania M 809. Tak. Niech (p_n) będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych, tzn. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ itd. Liczbie dodatniej α przyporządkujmy zbiór

$$A_\alpha = \{p_1^{[\alpha]}, p_2^{[2\alpha]}, p_3^{[3\alpha]}, \ldots\},$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x. Dla dowolnych $\beta > \alpha > 0$ każdy element wspólny zbiorów A_α i A_β musi być postaci $p_n^{[n\alpha]} = p_n^{[n\beta]}$, więc $n\alpha \geq [n\alpha] = [n\beta] \geq n\beta - 1$, skąd $n \leq 1/(\beta - \alpha)$. Zatem zbiory A_α i A_β mają co najwyżej $[1/(\beta - \alpha)]$, a więc skończenie wiele, elementów wspólnych.

Uwaga. Zadanie wyboru ze zbioru przeliczalnego continuum podzbiorów o skończonych przecięciach jest już dość stare i ma wiele pięknych rozwiązań. Pan Marek Pycia podał taką konstrukcję: każdej liczbie rzeczywistej α przyporządkowujemy podzbiór zbioru liczb wymiernych, którego elementami są wyrazy pewnego ciągu liczb wymiernych zbieżnego do α. Ponieważ ciągi o różnych granicach mogą mieć co najwyżej skończoną liczbę wspólnych wyrazów, więc warunki zadania są spełnione. Pan Krzysztof Woźniakowski wskazał inne rozwiązanie:



elementami zbioru przeliczalnego są węzły tego drzewa, a szukanymi podzbiorami wszystkie drogi w dół.