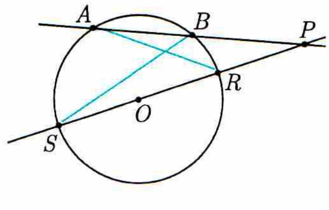
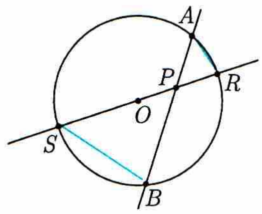
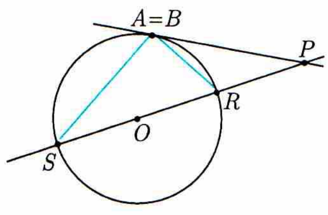
Potęga



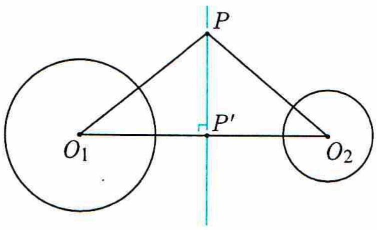
Rys. 1



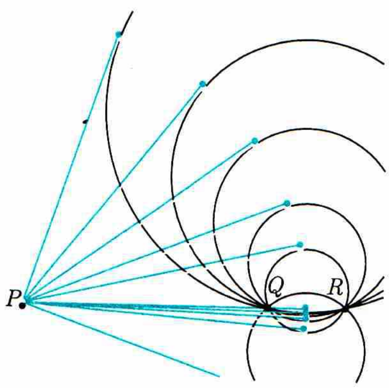
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Nawiasem mówiąc taki jest sens – skracanie rozumowań – każdego wprowadzania do matematyki nowych pojęć. W przeciwnym razie mówilibyśmy w matematyce jedynie bezpośrednio o liczbach, figurach i granicy – nie byłoby miejsca ani na równania, ani na funkcje, ani na zbiory, słowem właściwie na nic z tego, czym się faktycznie w matematyce zajmujemy.

Mamy okrąg o (o środku O i promieniu r) oraz punkt P. Okazuje się, że jakąkolwiek weźmiemy prostą przechodzącą przez P i przecinającą o – oznaczmy punkty przecięcia przez A i B – **zawsze liczba** $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ **jest taka sama** (dla nie lubiących wektorów: ten iloczyn to po prostu iloczyn $PA \cdot PB$, gdy P nie leży na odcinku AB i minus ten iloczyn, gdy leży).

Dowód powyższego stwierdzenia polega na wykazaniu, że liczba ta jest równa $PO^2 - r^2$. Na szczęście nie ma z tym kłopotu (choć niektórzy...– proszę zajrzeć do kącika olimpijskiego w tym numerze). Wystarczy poprowadzić prostą PO – oznaczmy jej punkty przecięcia z o przez R i S. Okazuje się (rys. 1 i 2), że w każdym przypadku trójkąty PAR i PSB są podobne (bo $\angle APR = \angle SPB$ – jako równe lub wierzchołkowe – oraz $\angle PAR = \angle PSB$ – jako wpisane oparte na tym samym łuku). Wobec tego

$$\frac{PA}{PR} = \frac{PS}{PB}, \qquad \text{czyli} \qquad PA \cdot PB = PR \cdot PS.$$

Ale $PS = PO + r$, natomiast PR to $PO - r$, gdy P jest na zewnątrz okręgu i $r - PO$ w przeciwnym przypadku.

Aby się upewnić, że z nami nie jest tak, jak z tymi z kącika olimpijskiego, zadanie sprawdzające: wykazać, że gdy $A = B$ – czyli gdy prosta przez P jest styczna do okręgu (rys. 3) – to też jest dobrze.

Ze względu na geometryczne znaczenie, podane w pierwszym akapicie, liczba $PO^2 - r^2$ nazywana jest *potęgą punktu P względem okręgu o*. Nie jest to żadna mądrość, tylko narzędzie pozwalające krócej opisać niektóre sytuacje geometryczne. Potęga ma właściwie jedną istotną własność: *punkty mające równe potęgi względem dwóch okręgów leżą na jednej prostej* (nazywa się ją prostą potęgową tych okręgów).

Oto uzasadnienie. Niech punkt P ma taką samą potęgę względem o_1 i o_2, ponadto niech P' będzie jego rzutem prostokątnym na O_1O_2. Wówczas (rys. 4)

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2, \qquad \text{czyli} \qquad P'O_1^2 + P'P^2 - r_1^2 = P'O_2^2 + P'P^2 - r_2^2,$$

$$\text{czyli} \qquad P'O_1^2 - r_1^2 = (O_1O_2 - P'O_1)^2 - r_2^2,$$

$$\text{czyli} \qquad r_1^2 + O_1O_2^2 - 2 \cdot O_1O_2 \cdot P'O_1 - r_2^2 = 0$$

$$\text{i ostatecznie} \qquad P'O_1 = \frac{O_1O_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Ostatecznie, bo oznacza to, że rzuty prostokątne wszystkich punktów o równych potęgach względem o_1 i o_2 na prostą O_1O_2 są w tym samym miejscu – wszystkie takie punkty muszą więc leżeć na prostej oznaczonej na rysunku 4 kolorem.

Dla kolejnego sprawdzenia, czy nie jesteśmy przypadkiem tacy, jak..., trzy proste zadania: uzasadnić, że

1. gdy okręgi są styczne, to ich prosta potęgowa jest ich wspólną styczną w punkcie styczności,
2. gdy okręgi się przecinają, to ich prosta potęgowa przechodzi przez ich punkty przecięcia,
3. gdy dane są trzy okręgi, to proste potęgowe wszystkich trzech par albo mają wspólny punkt, albo wspólny kierunek.

Uwaga: do rozwiązania zadania 3 nie jest potrzebna geometria!

Na zakończenie przykład bardziej efektownego zadania – jego rozwiązanie dobitnie pokazuje, jak skraca się rozumowanie, gdy używamy pojęcia potęgi: *Punkt Q leży wewnątrz odcinka PR. Rozpatrujemy rodzinę wszystkich okręgów przechodzących przez Q i R. Opisać figurę złożoną ze wszystkich punktów styczności prostych przechodzących przez P z którymś z okręgów tej rodziny* (rys. 5).

Faktycznie nie ma tu co robić – jest to okrąg o promieniu $\sqrt{PQ \cdot PR}$.

Marek KORDOS