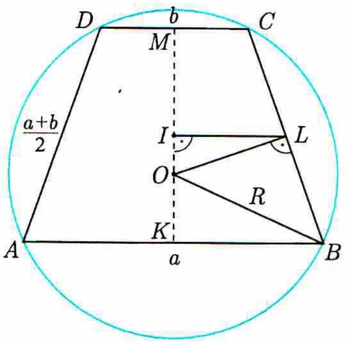
Artykuł jest skróconą wersją pracy Autora, która została we wrześniu 1996 roku nagrodzona złotym medalem w finale Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki. Skróty w tekście pochodzą od redakcji.

Krótka historia dowodu pewnego ciekawego twierdzenia

Michał STUKOW



Rys. 1

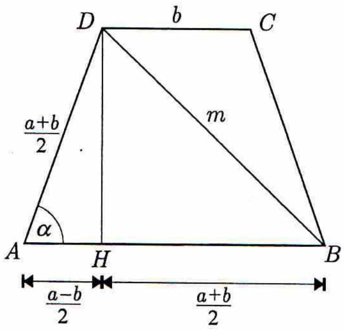
W poniższej pracy rozpatrujemy czworokąty, które jednocześnie są wpisane w pewien okrąg i opisane na innym okręgu. W całym tekście R i r oznaczają promienie okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego, O i I – środki tych okręgów, $w = |OI|$ jest odległością środków, S to pole czworokąta, a p – połowa jego obwodu. Naszym celem będzie wyznaczenie w w zależności od R i r, czyli znalezienie wzoru analogicznego do zachodzącego w każdym trójkącie wzoru Eulera: $w^2 = R^2 - 2Rr$.

1. Rozpatrzmy na początek prosty przypadek szczególny (patrz rys. 1), gdy czworokąt $ABCD$ jest trapezem: równoramiennym (bo tylko równoramienny trapez można wpisać w okrąg), o podstawach długości a i b ($a \geq b$) i ramionach długości $\frac{a+b}{2}$ (bo tylko taki trapez równoramienny można opisać na okręgu). Punkty K, L, M niech będą środkami boków (odpowiednio) AB, BC, CD. Wówczas środek okręgu wpisanego I jest środkiem KM, O zaś leży na prostej MK tak, że $I \in OM$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$w^2 = |OL|^2 - |IL|^2 = |OB|^2 - |BL|^2 - |IL|^2,$$

a ponieważ $|BL| = |IL| = (a+b)/4$, więc

$$w^2 = R^2 - \frac{(a+b)^2}{8}.$$



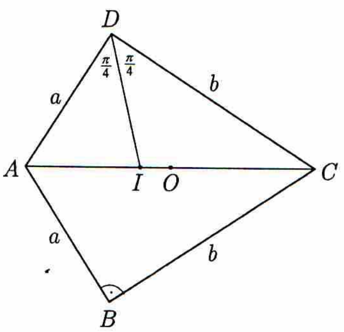
Rys. 2

Wystarczy więc wyznaczyć $k = (a+b)^2$ w zależności od R i r. Przy oznaczeniach z rysunku 2 mamy z twierdzenia sinusów: $m = 2R\sin\alpha$. Ponadto, $m^2 = 4r^2 + \frac{(a+b)^2}{4}$ z twierdzenia Pitagorasa, a $\sin\alpha = |HD|/|AD| = 4r/(a+b)$. Rugując z tych trzech równań niewiadome m oraz $\sin\alpha$ otrzymamy

$$\frac{k^2}{4} + 4r^2k - 64R^2r^2 = 0.$$

Spójrzmy na to jak na równanie kwadratowe z niewiadomą k (liczby R i r traktujemy jako parametry). Wyznaczywszy k dostaniemy po łatwych przekształceniach

$$w^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}. \tag{1}$$



Rys. 3

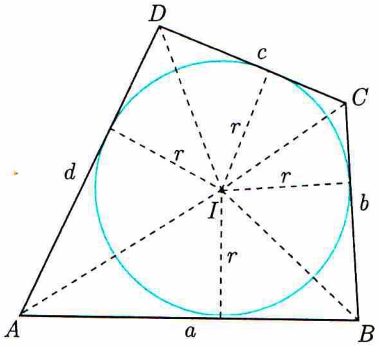
2. Jako drugi przypadek szczególny rozpatrzymy deltoid $ABCD$ o dwóch przeciwległych kątach prostych (patrz rysunek 3). Punkt O pokrywa się ze środkiem odcinka AC, punkt I zaś leży na dwusiecznej $\angle ADC$, więc z twierdzenia o dwusiecznej mamy

$$\frac{|AI|}{|IC|} = \frac{|AI|}{2R - |AI|} = \frac{a}{b}.$$

Stąd $|AI| = 2aR/(a+b)$, a $w^2 = (R - |AI|)^2 = R^2 - 4R^2ab/(a+b)^2$. Pozostaje wyznaczyć $ab/(a+b)^2$ w zależności od promieni obu okręgów. W tym celu oznaczmy przez S pole deltoidu równe ab, natomiast przez $p = a+b$ połowę jego obwodu. Wówczas $S = pr$, a stąd wynika, że

$$\frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{r}{p}, \qquad 4R^2 = p^2 - 2pr$$

(drugie równanie dostaniemy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ADC). Jak poprzednio, rozwiązujemy równanie kwadratowe, by wyznaczyć p, a następnie po nietrudnym rachunku ponownie otrzymujemy wzór (1) – ten sam, który zachodzi dla trapezu równoramiennego.



Rys. 4 Pole S dowolnego wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r jest równe iloczynowi połowy obwodu tego wielokąta przez promień okręgu.

Ta zgodność wyników dla dwóch różnych przypadków szczególnych pozwala sformułować hipotezę:

wzór (1) zachodzi dla dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu R i jednocześnie opisanego na okręgu o promieniu r.

3. Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny (patrz rys. 5, który zawiera potrzebne oznaczenia). W dowodzie hipotezy wykorzystamy następujące wzory:

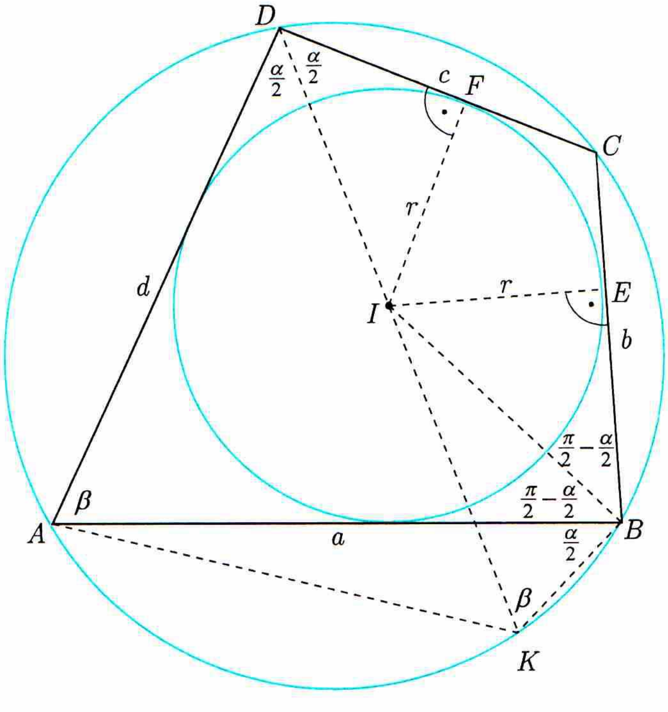
(2) $\quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{abcd}\,,$

(3) $$S = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{4R}\,.$$

Pierwsza równość w (2) to tzw. wzór Brahmagupty, prawdziwy dla dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg (druga równość bierze się z faktu, że czworokąt jest także opisany na pewnym okręgu). Wzór (3) jest nietrudnym uogólnieniem tożsamości $S = abc/4R$ prawdziwej dla każdego trójkąta – zachęcamy Czytelnika do samodzielnego przeprowadzenia dowodu.

Zapiszmy wzór (1) w postaci $R^2 - w^2 = r\sqrt{r^2+4R^2} - r^2$. Z twierdzenia o siecznych okręgu wynika, że lewa strona jest równa $|ID|\cdot|IK|$. Wystarczy więc wyznaczyć ten iloczyn w zależności od R i r. Oto szkic dowodu. Kąty ABK i ADK są równe, a stąd wynika (proszę sprawdzić!), że trójkąt KBI jest prostokątny. Rozpatrując zależności boków i kątów w trójkątach KBI i EBI, dostajemy

$$|IK| = \frac{|IB|}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}}\,.$$



Rys. 5

Mnożąc obie strony tej równości przez $|ID| = r/\sin\frac{\alpha}{2}$, otrzymamy

(4) $$|ID|\cdot|IK| = \frac{2r^2}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{8r^2R^2}{|AC|\cdot|BD|} = \frac{8r^2R^2}{ac+bd}\,.$$

Druga równość wynika z twierdzenia sinusów, a trzecia – z dobrze Czytelnikom *Delty* znanego twierdzenia Ptolemeusza. Oznaczając $m = ac+bd$ i wykorzystując wzory (2) oraz (3) dostajemy

(5) $$\frac{1}{m} = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{16R^2S^2} = \frac{1}{16R^2}\left(\frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+d^2}{bd}\right)\,.$$

Ponieważ $p = a+c = b+d$, więc ze wzoru Brahmagupty (2) otrzymujemy równości $(a+c)^2 = p^2 = S^2/r^2 = abcd/r^2$. Stąd $a^2+c^2 = \frac{abcd}{r^2} - 2ac$ i podobnie $b^2+d^2 = \frac{abcd}{r^2} - 2bd$. Wykorzystując obie te zależności, przekształcamy (5) do postaci

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{16R^2}\left(\frac{m}{r^2} - 4\right)\,.$$

Stąd już łatwo obliczamy $m = 2r^2 + 2r\sqrt{r^2+4R^2}$, wstawiamy tę wartość do (4) i po uwolnieniu mianownika od niewymierności mamy gotowy dowód postawionej wcześniej hipotezy.

Warto podkreślić, że rozpatrzenie przypadków szczególnych istotnie pomogło nam w uzyskaniu dowodu zależności $w^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2+4R^2}$ w ogólnym przypadku. Po pierwsze, można było sformułować hipotezę głoszącą, że w zależy jedynie od R i r. Po drugie, wiadomo było, czego należy dowodzić, a dzięki temu można było zastosować twierdzenie o siecznych okręgu. Rozumowania tego typu, pokazujące drogę od sformułowania hipotezy do jej kompletnego dowodu, rzadko pojawiają się w literaturze szkolnej, a szkoda, bo są bardzo kształcące.

Na koniec zauważmy jeden ciekawy wniosek płynący ze wzoru (1): zawsze mamy $w^2 \geq 0$, a stąd

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2}\,,$$

przy czym równość zachodzi, jak łatwo sprawdzić, jedynie dla kwadratu.