# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1997

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

### Zadania z matematyki nr 339, 340

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**339.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty $P$ i $Q$ leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $|AP| = |CD|$, $|AQ| = |BC|$. Wykazać, że środek odcinka $PQ$ leży na prostej $AC$.

**340.** Dowieść, że dla liczb nieujemnych $a$, $b$, $c$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc}\right) \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}\right).$$

Zadanie **340** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1996

Przypominamy treść zadań:

**331.** Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające tożsamościowo równanie $P(2x - x^2) = P(x)^2$.

**332.** W ostrosłupie o podstawie prostokątnej $OACB$ oraz wysokości $OS$, prostopadłej do płaszczyzny podstawy, znane są: kąt $\alpha$ między podstawą i ścianą $SAC$, kąt $\beta$ między podstawą i ścianą $SBC$, oraz długość przekątnej podstawy $c = OC$. Obliczyć długość krawędzi $SC$.

**331.** Załóżmy, że wielomian $P(x)$, nie równy tożsamościowo zeru, spełnia podane równanie i przyjmijmy $Q(x) = P(1-x)$. Wówczas $P(x) = Q(1-x)$, co po podstawieniu do równania daje związek: $Q((1-x)^2) = (Q(1-x))^2$; równoważnie:

(1) $$Q(x^2) = Q(x)^2 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$

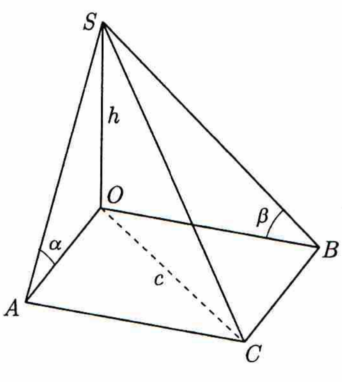
Przypuśćmy, że $Q(x)$ nie jest jednomianem; daje się więc zapisać jako

$$Q(x) = ax^k + x^m R(x),$$

gdzie $m > k \geq 0$ są wykładnikami całkowitymi, $a \neq 0$ jest stałym współczynnikiem, a $R(x)$ jest wielomianem, $R(0) \neq 0$. Dla takiego wielomianu $Q(x)$ wyrażenia po lewej i prawej stronie równania (1) mają (odpowiednio) postać

$$ax^{2k} + x^{2m}R(x^2), \qquad a^2x^{2k} + 2ax^{k+m}R(x) + x^{2m}R(x)^2.$$

W drugim z nich występuje z niezerowym współczynnikiem wyraz $x^{k+m}$; w pierwszym – nie występuje. Sprzeczność dowodzi, że $Q(x)$ musi być jednomianem: $Q(x) = ax^k$ ($a \neq 0$); z równości (1) wnosimy, że $a = 1$, i ostatecznie $P(x) = (1-x)^k$; wykładnik $k$ może być dowolną nieujemną liczbą całkowitą. Dołączając do tej rodziny wielomianów jeszcze wielomian równy tożsamościowo zeru otrzymujemy ogólne rozwiązanie postawionego zagadnienia.




**332.** Jeśli $|OS| = h$, to $|OA| = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $|OB| = h \cdot \operatorname{ctg}\beta$,

$$c^2 = |OA|^2 + |OB|^2 = h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta),$$

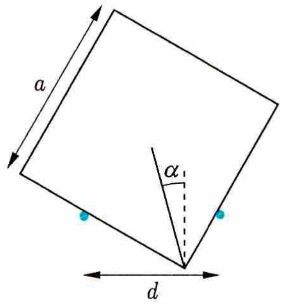
i wobec tego

$$|SC| = \sqrt{c^2 + h^2} = c \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}}.$$

## Zadania z fizyki nr 237, 238

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**237.** Jednorodny sześcian o boku $a$ położono na dwóch cienkich, równoległych i poziomych prętach odległych o $d$ (rys. 1). Tarcie między sześcianem a prętami nie występuje.
a) Jaki warunek muszą spełniać $a$ i $d$, aby dla $\alpha = 0$ równowaga była trwała, tzn. aby po małym przechyle następował powrót do tego położenia?
b) Jaki warunek muszą spełniać $a$ i $d$, aby sześcian mógł spoczywać na prętach w równowadze dla pewnego kąta $\alpha$ różnego od zera? Czy ten stan równowagi będzie trwały?

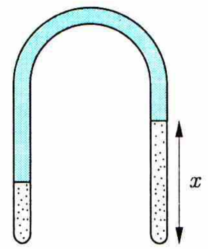


Rys. 1

**238.** Dwa pierwiastki w temperaturze pokojowej występują w stanie gazowym, przy czym jeden jest gazem jednoatomowym, a drugi – dwuatomowym. Okazuje się, że zderzenia atomów (lub cząsteczek) pierwiastka $A$ są sprężyste (suma energii kinetycznych przed zderzeniem jest równa tej sumie po zderzeniu), natomiast dla pierwiastka $B$ często są niesprężyste. Który z pierwiastków $A$ i $B$ jest gazem jednoatomowym, a który dwuatomowym, i dlaczego?
Po silnym oziębieniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego?
Po silnym podgrzaniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek także mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego?
Zachowując temperaturę początkową zmieszano gazy. Czy zderzenia cząsteczek jednego gazu z atomami drugiego są sprężyste?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1996

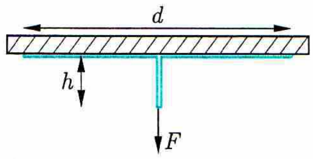
Przypominamy treść zadań



Rys. 2

**229.** W zamkniętej rurce o kształcie litery $U$ dwie jednakowe ilości gazu są rozdzielone słupem rtęci (rysunek obok). Jaki warunek muszą spełniać parametry $S$ (pole przekroju poprzecznego rurki), $l$ (długość każdego ze słupów gazu), $T$ (temperatura), $n$ (liczba moli gazu w każdej części), $\varrho$ (gęstość rtęci) i g (przyspieszenie ziemskie), aby po odwróceniu rurki „do góry nogami" równowaga słupa rtęci w położeniu symetrycznym okazała się niestabilna? Założyć, że słup rtęci nie ulegnie przerwaniu.

**230.** Do prostego pręta w dwóch punktach odległych od siebie o $d = 10$ cm przymocowano końce nici o długości $l = 14$ cm i rozpięto błonkę cieczy (np. bańkę mydlaną) między prętem a nicią. Do środkowego punktu nici przyłożono siłę $F$ skierowaną prostopadle do pręta, w rezultacie czego ten punkt odsunął się od pręta na odległość $h$. Zbadać zależność $F(h)$ i wykonać wykres tej funkcji, w razie potrzeby posługując się obliczeniami numerycznymi; można przyjąć dowolną liczbową wartość napięcia powierzchniowego.



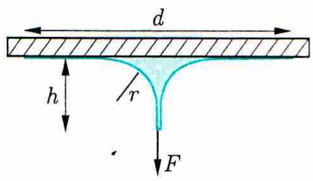
Rys. 3

**229.** Niech długość słupa gazu po jednej stronie wynosi $x$, a po drugiej $2l - x$ (rys. 2). Po odwróceniu rurki warunek równowagi słupa rtęci przybiera postać

$$(2l - x - x)\varrho g = \frac{nRT}{S}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2l - x}\right).$$

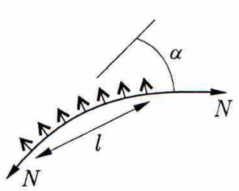
Wprowadźmy oznaczenie $\tau = nRT/\varrho gS$. Analiza algebraiczna wskazuje, że jeśli wykluczymy symetryczne rozwiązanie $x = l$, to pozostaje nam równanie

$$x^2 - 2lx + \tau = 0.$$



Rys. 4

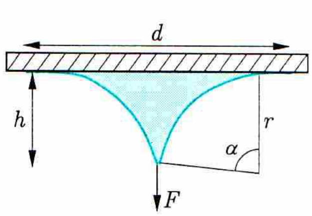
Ma ono rozwiązania pod warunkiem, że $l^2 > \tau$; nietrudno sprawdzić, że te dodatkowe rozwiązania są stabilne, podczas gdy symetryczne położenie słupa rtęci staje się niestabilne. Jeśli postawimy dany problem w taki sposób, że rurka pozostaje odwrócona i np. rozpoczynając od wysokiej temperatury ($\tau > l^2$) obniżamy ją, to w punkcie $\tau = l^2$ mamy do czynienia z przykładem tzw. spontanicznego łamania symetrii, znanego w różnych gałęziach fizyki (w tym w fizyce cząstek elementarnych).



Rys. 5

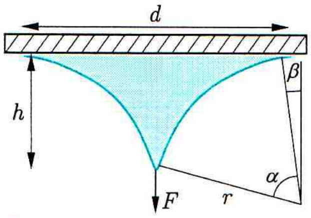
**230.** Wystarczy dowolnie mała siła $F$, aby $h$ osiągnęło wartość $(l - d)/2 = 2$ cm (rys. 3). Dopiero po przekroczeniu tego punktu powierzchnia błonki zacznie się zwiększać, przy czym początkowo przybierze ona kształt przedstawiony na rysunku 4. Aby wyznaczyć dokładny kształt „niesklejonych" części nitki, rozpatrzmy siły działające na jej mały fragment (rys. 5). Ponieważ siły napięcia powierzchniowego są prostopadłe do nitki, więc napinająca nitkę siła $N$ ma wszędzie jednakową wartość. Warunek równowagi sił przedstawionych na rysunku 5 dla małego kąta $\alpha$ ma postać

$$N\alpha = 2l\sigma,$$

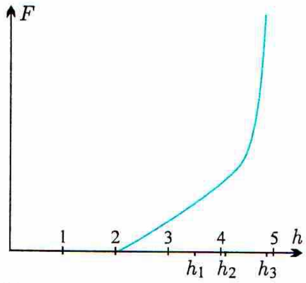


Rys. 6

gdzie $\sigma$ jest napięciem powierzchniowym (czynnik 2 wynika z uwzględnienia obu stron błonki). Widzimy, że promień krzywizny nitki $r = l/\alpha = N/2\sigma$ jest stały, tzn. ma ona kształt łuku



Rys. 7



Rys. 8

okręgu. W przypadku przedstawionym na rysunku 4 promień łuku $r$ jest powiązany z $h$ wzorem

$$l = d - 2r + 2(h - r) + \pi r\,,$$

a dalej znajdujemy

(1) $$F = 2N = 4\sigma r = 4\sigma(d + 2h - l)/(4 - \pi)\,.$$

Otrzymana zależność $F(h)$ jest liniowa, a obowiązuje ona dopóty, dopóki pewne odcinki nitki pozostają „przyklejone" do pręta (w pobliżu końców nitki), a inne – do siebie nawzajem (w pobliżu środka). Przy podanych wartościach $l$ i $d$ (ogólnie, gdy $2l < \pi d$) nitka najpierw „odklei się do końca" w środku; nastąpi to w momencie, gdy $h$ przekroczy wartość $h_1 = (l - d)/(\pi - 2) = 3{,}504$ cm. Wtedy błonka przybierze kształt przedstawiony na rysunku 6 i mamy układ równań

(2) $$h = r(1 - \cos\alpha)\,, \quad l = d - 2r\sin\alpha + 2r\alpha\,, \quad F = 4\sigma r\sin\alpha\,.$$

Wyeliminowanie kąta $\alpha$ i wyznaczenie szukanej funkcji $F(h)$ może być przeprowadzone w tym przypadku tylko numerycznie. Przy dalszym zwiększaniu siły $F$ osiągamy punkt $h = h_2$, w którym nitka „odkleja się" także od pręta. Wartość $h_2$ można wyznaczyć dołączając do równań (2) dodatkowy warunek $d = 2r\sin\alpha$; otrzymuje się $h_2 = 4{,}096$ cm. Po przekroczeniu tego punktu obowiązują równania (zob. rys. 7)

(3) $$h = r(\cos\beta - \cos(\alpha + \beta))\,, \quad d = 2r((\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta)\,, \quad l = 2r\alpha\,, \quad F = 4\sigma r\sin(\alpha + \beta)\,.$$

Maksymalną wartością $h$ (osiąganą w granicy $F \to \infty$) jest $h_3 = (1/2)\sqrt{l^2 - d^2} = 4{,}899$ cm. Kompletując dane numeryczne uzyskane z analizy równań (1), (2) i (3) otrzymujemy wykres $F(h)$ przedstawiony na rysunku 8.

## List do Redakcji *Delty*

Ciekawy skądinąd artykuł Stanisława Mrówczyńskiego „Rozszczepienie jąder uranu i datowanie skał" (*Delta* 11/1996) koniecznie wymaga uzupełnienia. Czytelnik, który nie uczył się jeszcze o uranie (a o pierwiastku tym mówi się dopiero w ostatniej klasie liceum) może dojść do wniosku (sprawdziłem to na paru zdolnych uczniach), że promieniotwórczość uranu polega właśnie na rozszczepieniu jego jąder, bo tylko o takiem rozpadzie najbardziej rozpowszechnionego izotopu, $^{238}$U, jest mowa w artykule. Tymczasem, dla tego izotopu rozszczepienie jest zjawiskiem marginalnym: jedno rozszczepienie przypada średnio na blisko milion rozpadów na cząstkę $\alpha$, czyli jądro helu $^4$He oraz izotop toru $^{234}$Th. Ciekawe byłoby wyjaśnienie, dlaczego nie ten rozpad, tylko właśnie tak rzadkie rozszczepienie zostawia w skałach wyraźne ślady. Liczę w tym względzie na odpowiedź Autora artykułu.

*Piotr GOLDSTEIN*

## Dlaczego w górach jest zimniej?

Najwięcej energii w widmie słonecznym niesie promieniowanie widzialne, ale bezpośrednio ogrzać powietrza nie może, gdyż jest ono dla niego przezroczyste. Światło może przekazać energię powierzchni Ziemi, dopiero od niej ogrzewa się powietrze. Ogrzane bańki powietrza unoszą się ku górze, rozprężają (bo ciśnienie ku górze spada), a więc i ochładzają.

Jak gwałtowny jest spadek temperatury z wysokością? Można to oszacować w dwóch etapach.

1. Oszacujmy najpierw spadek ciśnienia z wysokością. Gdy obserwator uniesie się o $\mathrm{d}h$, to ciężar słupa powietrza o jednostkowym przekroju nad nim zmaleje o $g\varrho\,\mathrm{d}h$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a $\varrho$ gęstością. Spadek ciśnienia wynosi więc

$$\mathrm{d}P = -g\varrho\,\mathrm{d}h\,.$$

Przy powierzchni Ziemi mamy: $g = 10$ m/s$^2$, $\varrho = 1{,}3$ kg/m$^3$, więc $\mathrm{d}P \approx -13\,\mathrm{d}h$ w jednostkach SI.

2. Unoszące się powietrze ochładza się w przybliżeniu adiabatycznie, czyli

$$PT^{\gamma} = \mathrm{const}\,, \quad \text{gdzie} \quad \gamma \approx -2{,}5\,.$$

Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = 2{,}5\frac{\mathrm{d}T}{T}\,,$$

co po wykorzystaniu wyniku z punktu 1 daje

$$\mathrm{d}T \approx -5\frac{T}{P}\,\mathrm{d}h\,.$$

Podstawiwszy $T \approx 300$ K, $P = 100\,000$ Pa, stwierdzamy, że temperatura opada o 1,5 K na każde 100 m wysokości.

Nic więc dziwnego, że nawet w tak niskich górach jak Tatry przez cały rok utrzymują się miejscami płaty śniegu. Troposfera jest tą warstwą atmosfery, w której temperatura spada ze wzrostem wysokości. Wyżej temperatura rośnie, gdyż w stratosferze leży warstwa ozonu absorbująca słoneczny nadfiolet. Jeszcze wyżej, w mezosferze, temperatura powietrza znowu spada ze wzrostem wysokości, tak jak być powinno.

*Tomasz KWAST*