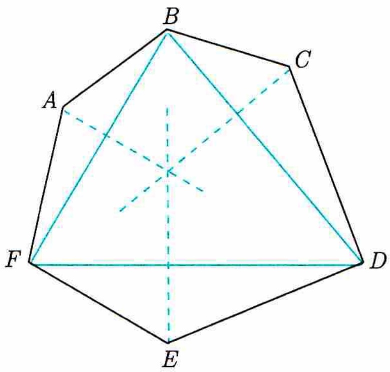
Kącik olimpijski (20)

Wyjście z cienia

Jedno z zadań II stopnia XLVI Olimpiady Matematycznej brzmiało:

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF i FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.



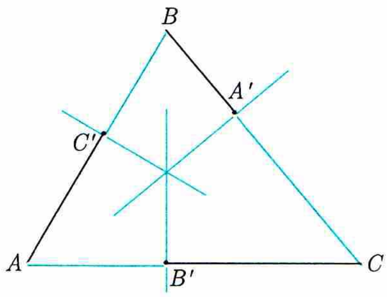
Zadanie nie jest łatwe; zachęcam do samodzielnej próby rozwiązania. Dopiero potem (lub po rezygnacji) proponuję dalszą lekturę.

Oto rozwiązanie Komitetu Głównego, dostarczone po zawodach uczestnikom – zadziwiająco krótkie:

Rozważmy okręgi o środkach B, D, F i promieniach odpowiednio równych $|BA|$, $|DC|$, $|FE|$. Osie potęgowe tych okręgów pokrywają się z prostymi zawierającymi rozpatrywane wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB. Oczywiście, te trzy osie potęgowe przecinają się w jednym punkcie.

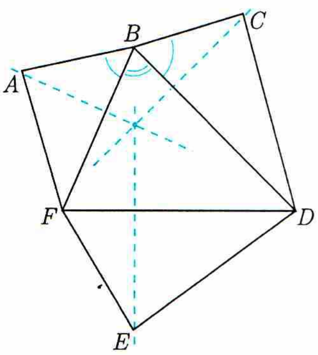
Uczestnicy zawodów przeważnie reagowali na treść rozwiązania stwierdzeniem, że nigdy nie słyszeli o osiach potęgowych okręgów. Niektórzy zresztą rysowali w brudnopisach opisane okręgi, nie wiedząc, że można się tu na coś powołać.

Osi potęgowych nie ma w programie szkolnym, nie jest to też „klasyczny” chwyt olimpijski (typu zasady szufladkowej czy twierdzenia Cevy). Niemniej jednak uczestnicy potrafili sobie z zadaniem poradzić! W Krakowie rozwiązało je kilka osób, czterema różnymi, bardzo ładnymi sposobami.



Jeden z dowodów oparty był na lemacie: *Proste prostopadłe do boków trójkąta ABC poprowadzone z punktów $C' \in AB$, $A' \in BC$, $B' \in AC$ przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy* $|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |BC'|^2 + |CA'|^2 + |AB'|^2$. By to wykazać w jedną stronę, wystarczy zastosować twierdzenie Pitagorasa; urok dowodu polega na pięknym wykazaniu implikacji odwrotnej. Prowadzimy dowód nie wprost, zakładamy, że zachodzi nierówność – po czym przesuwamy równolegle jedną z prostych do punktu przecięcia dwóch pozostałych i korzystamy z wykazanego wynikania w przeciwną stronę... Szczegóły pozostawiam Czytelnikowi.

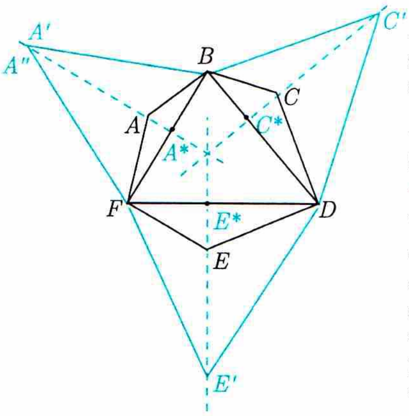
Natomiast inny sposób wręcz olśnił Komitet Okręgowy; nikt spośród nas nie spodziewał się, że można problem pokonać metodą tak ładną. Oto ona. Jeżeli $\angle ABF + \angle DBC > \angle FBD$ (i analogicznie przy dwóch pozostałych kątach trójkąta BDF), wtedy rysunek czterech trójkątów jest... siatką czworościanu o podstawie BDF. Szukany punkt przecięcia zaś to po prostu rzut wierzchołka!



No dobrze, ale to przypadek łatwiejszy. Co zrobić, gdy $\angle ABF + \angle DBC \leq \angle FBD$? Oznaczmy spodki badanych wysokości przez A^*, C^*, E^*. Na prostej AA^* obierzmy punkt A', a na prostej CC^* punkt C' tak, by $|A'B| = |BC'|$ i $\angle A'BF + \angle DBC' > \angle FBD$. Następnie weźmy punkty E' na prostej EE^* i A'' na prostej AA^* tak, by $|C'D| = |DE'|$ i $|E'F| = |FA''|$. Jeżeli wykażemy, że $A' = A''$, to sześciokąt $A'BC'DE'F$ tworzy siatkę czworościanu i rzecz sprowadza się do pierwszego przypadku, bo badane proste się nie zmieniły... Ale wykazanie, że $A' = A''$ jest niezwykle łatwe, wystarczy kilka razy zastosować twierdzenie Pitagorasa wykorzystując założoną równość odpowiednich odcinków.

To pozostawiam jako ćwiczenie.

Pomysł „wyjścia w przestrzeń” w zadaniu z geometrii płaszczyzny jest niestandardowy i bardzo oryginalny („odważny”, jak powiedział jeden z najbardziej doświadczonych członków Komitetu Okręgowego). No, i przyniósł przepiękny, krótki dowód.



A oto zadanie z I etapu tej samej, XLVI Olimpiady Matematycznej; dowiedziałem się, że ono również ma oryginalne rozwiązanie za pomocą „wyjścia w przestrzeń”. Miłej zabawy!

Dana jest prosta k oraz leżące na niej trzy różne punkty. Każdy z nich jest początkiem pary półprostych, wszystkie te półproste leżą w jednej półpłaszczyźnie o krawędzi k. Każda z tych par półprostych wyznacza z każdą inną czworokąt. Dowieść, że jeśli w dwa z tych czworokątów można wpisać okrąg, to również w trzeci można wpisać okrąg.

Czemu ten kącik został zatytułowany „wyjście z cienia”? W rozwiązaniu „wyszliśmy”, co prawda, z siatki czworościanu, ale po jej „gięciu” mamy na płaszczyźnie cień czworościanu. Zaś „Wyjście z cienia” to tytuł książki, którą gorąco polecam, wydanej w roku 1983, napisanej przez znakomitego, nieżyjącego już pisarza, Janusza A. Zajdla. Zapewne niewielu z miłośników twórczości Zajdla (w tym, być może, olimpijczyków) wie, że Janusz Zajdel został wyróżniony w finale VI Olimpiady Matematycznej...

Krzysztof CIESIELSKI