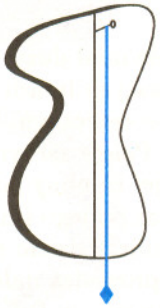
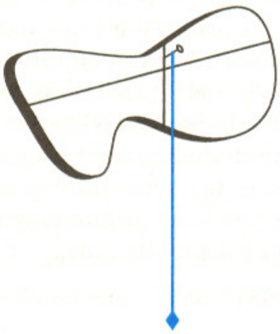
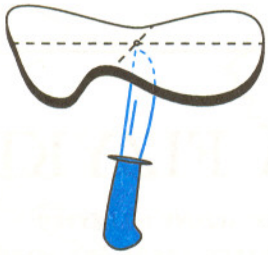


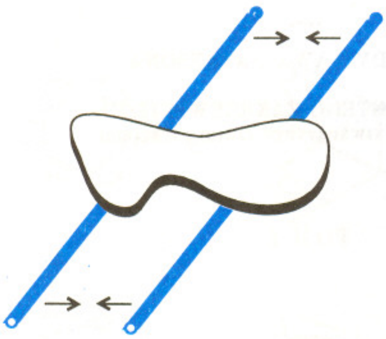
Rys. 1



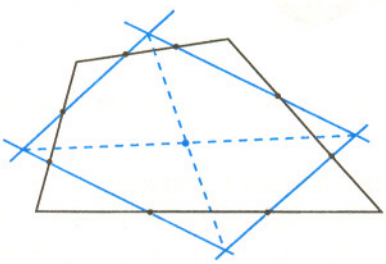
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. Dowód, że równoległobok Wittenbauera ma opisaną obok własność, leży w zasięgu elementarnego rozumowania.

Środek ciężkości

– Podejście pierwsze: z pionem

Środek ciężkości to punkt, który ze wszystkich punktów sztywnego ciała **najbardziej lubi być jak najniżej**.

Zawieszone ciało nazywa się wahadłem i może – jak z samej nazwy wynika – wahać się. Jeśli wahania wygasną (albo je sami stłumimy), to środek ciężkości znajdzie się dokładnie pionowo pod punktem zawieszenia. Pozwala to na szybkie znalezienie środka ciężkości za pomocą, oczywiście, pionu. Bardzo to wygląda efektownie, gdy badane ciało jest płaskie, gdy jest to deseczka. Zawieszamy mianowicie tę deseczkę w jakimś punkcie, przykładamy do tego punktu pion (sznurek z ciężarkiem) i zaznaczamy na deseczce położenie sznurka (rys. 1). Potem robimy to po raz drugi (oczywiście, zawieszamy w innym punkcie – rys. 2). Tam, gdzie przetną się zaznaczone linie, znajduje się środek ciężkości – dokładniej: w połowie grubości deseczki.

Należy to, rzecz jasna, sprawdzić. W tym celu umieszczamy deseczkę poziomo i opieramy ją w znalezionym punkcie na czymś ostrym, np. na ostrzu noża fińskiego (rys. 3). Jeśli deseczka nie spadnie, będzie to oznaczało, że środek ciężkości zlokalizowaliśmy prawidłowo.

– Podejście drugie: z kijem,

a właściwie z dwoma. Do tego potrzebny jest nam kolega-eksperymentator lub przynajmniej pomocnik-laborant. Tę samą deseczkę kładziemy poziomo na dwóch prostych i dość gładkich kijach (np. od szczotki). Kije trzymamy poziomo i równolegle. Następnie bardzo powoli zsuwamy je dbając, by były cały czas równoległe i cały czas na tym samym poziomie (rys. 4). Gdy się zsuną zupełnie, zaznaczamy na deseczce linię, pod którą stykają się kije. Ponawiamy doświadczenie dla innego położenia deseczki na kijach. Podobnie jak poprzednio, środek ciężkości leży w przecięciu otrzymanych linii. I, podobnie jak poprzednio, warto to sprawdzić.

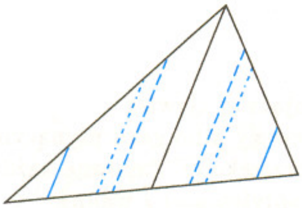
Ciekawą stroną tego doświadczenia jest fakt, iż podczas zsuwania kijów deseczka nie spada (oczywiście, gdy robimy to powoli). Zjawisko fizyczne, które to powoduje, jest znane jako **tarcie**. Można się przekonać mianowicie, iż jest ono tym większe, im większa jest siła nacisku. Jeśli deseczka przechyla się lekko w stronę, powiedzmy, lewego kija, to na niego wywiera większy nacisk niż na kij prawy. Wobec tego kij prawy przesuwa się pod deseczką łatwiej, szybciej, aż do chwili, gdy deseczka zacznie się przechylać w jego stronę. Wtedy przyspiesza lewy. W ten sposób deseczka leżąc na przesuwających się (jeszcze raz warto podkreślić: powoli) kijach sama łapie równowagę.

– Podejście trzecie: z geometrią

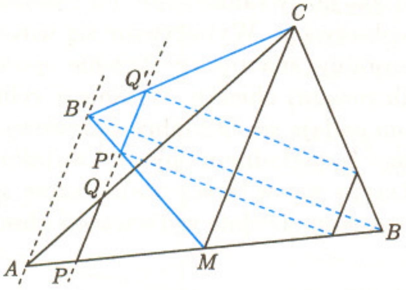
To podejście daje się, przy stosowaniu wyłącznie elementarnych środków, zastosować jedynie dla niewielu kształtów jednorodnych deseczek. Oto dwa przykłady.

• Dla deseczki trójkątnej środek ciężkości znajduje się w punkcie przecięcia środkowych trójkąta.

• Dla deseczki czworokątnej jest on w środku (czyli w punkcie przecięcia przekątnych) równoległoboku, zwanego równoległobokiem Wittenbauera, który powstaje tak: każdy bok czworokąta dzielimy na trzy równe części, po czym prowadzimy proste łączące punkty sąsiadujące z tym samym wierzchołkiem (rys. 5).



Rys. 6



Rys. 7

Powstaje pytanie: dlaczego tak właśnie jest? Łatwiejszy jest dowód pierwszego stwierdzenia. I starszy: został uzyskany wtedy, gdy Hannibal przeprowadzał słonie przez Alpy, a więc ponad 2200 lat temu. Jego autorem jest Archimedes. A dowód ten w gruncie rzeczy opiera się na doświadczeniu z kijami. Wystarczy wykazać, że kije mogłyby się zejść właśnie wzdłuż środkowej. Inaczej: trójkąt położony płasko na kiju wzdłuż którejkolwiek ze swoich środkowych z tego kija nie spadnie.

Jest tak dlatego, że w każdej odległości od kija znajduje się tyle samo deseczki (rys. 6). Aby to udowodnić, należy – w wyobraźni – złożyć deseczkę na pół. Teraz mamy (rys. 7)

$$\frac{PQ}{CM} = \frac{AP}{AM} = \frac{B'P'}{B'M} = \frac{P'Q'}{CM},$$

a więc $PQ = P'Q'$ i po dowodzie. Trzeba, oczywiście, znać twierdzenie Talesa, ale Archimedes je znał. No i zauważyć, że $AB' \parallel CM \parallel PQ'$, ale tak jest – prawda?

Najmniejszy wynik

Dane są dwie liczby całkowite dodatnie M i N. Pytanie jest następujące:

jaką najmniejszą liczbę dodatnią można uzyskać mnożąc M i N przez liczby całkowite i dodając (bądź odejmując) *otrzymane iloczyny*?

Inaczej: jaka jest najmniejsza dodatnia wartość liczby

$$X = k \cdot M + l \cdot N,$$

dla całkowitych (niekoniecznie dodatnich) wartości k i l?

Odpowiedź brzmi: tą najmniejszą liczbą jest największy wspólny dzielnik M i N. Rzeczywiście, X dzieli się przez $\mathrm{NWD}(M, N)$, nie może więc być od niego mniejszy. Ale czy zawsze znajdą się takie liczby k i l, by X było równe akurat $\mathrm{NWD}(M, N)$?

To da się zrobić. W tym celu dogodnie jest wykonać pewną operację zwaną *algorytmem Euklidesa*. Robi się to tak. Niech np. będzie $M > N$. Będziemy wielokrotnie dzielili z resztą.

$M = a_1 \cdot N + r_1,$
$N = a_2 \cdot r_1 + r_2,$
$r_1 = a_3 \cdot r_2 + r_3,$
$r_2 = a_4 \cdot r_3 + r_4,$ itd.

To się musi skończyć, bo kolejne reszty są coraz mniejsze, a nigdy nie są ujemne. Więc w końcu będzie

$r_{k-1} = a_{k+1} \cdot r_k + r_{k+1},$
$r_k = a_{k+2} \cdot r_{k+1} + 0.$

W tej sytuacji

$$r_{k+1} = \mathrm{NWD}\,(M, N),$$

a z całego rachunku (czyli z działania algorytmu Euklidesa) można odtworzyć potrzebne k i l. Podajemy obok dwa przykłady zostawiając odszukanie ogólnej metody chętnym Czytelnikom.

$\mathbf{1517} = 1 \cdot \mathbf{1073} + 444,$
$\mathbf{1073} = 2 \cdot 444 + 185,$
$444 = 2 \cdot 185 + 74,$
$185 = 2 \cdot 74 + 37,$
$74 = 2 \cdot 37 + 0.$

Zatem największym wspólnym dzielnikiem **1517** i **1073** okazało się 37.
Te same rachunki, w których podstawiać będziemy tylko „grube” liczby, wyglądać będą kolejno tak:

$444 = 1 \cdot \mathbf{1517} - 1 \cdot \mathbf{1073},$
$185 = 1 \cdot \mathbf{1073} - 2 \cdot 444 =$
$\quad = -2 \cdot \mathbf{1517} +$
$\qquad +(1+2) \cdot \mathbf{1073} =$
$\quad = -2 \cdot \mathbf{1517} + 3 \cdot \mathbf{1073},$
$74 = 1 \cdot 444 - 2 \cdot 185 =$
$\quad = (1+4) \cdot \mathbf{1517} +$
$\qquad +(-1-6) \cdot \mathbf{1073} =$
$\quad = 5 \cdot \mathbf{1517} - 7 \cdot \mathbf{1073},$
$37 = 1 \cdot 185 - 2 \cdot 74 =$
$\quad = (-2-10) \cdot \mathbf{1517} +$
$\qquad +(3+14) \cdot \mathbf{1073} =$
$\quad = -12 \cdot \mathbf{1517} + 17 \cdot \mathbf{1073}$
$\quad (= -18204 + 18241),$

czyli poszukiwane k i l to (-12) i 17.

Analogicznie

$\mathbf{771} = 5 \cdot \mathbf{146} + 41,$
$\mathbf{146} = 3 \cdot 41 + 23,$
$41 = 1 \cdot 23 + 18,$
$23 = 1 \cdot 18 + 5,$
$18 = 3 \cdot 5 + 3,$
$5 = 1 \cdot 3 + 2,$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0.$

Największym wspólnym dzielnikiem okazało się 1.
Dalsze obliczenia:

$41 = 1 \cdot \mathbf{771} - 5 \cdot \mathbf{146},$
$23 = 1 \cdot \mathbf{146} - 3 \cdot 41 =$
$\quad = -3 \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(1+15) \cdot \mathbf{146} =$
$\quad = -3 \cdot \mathbf{771} + 16 \cdot \mathbf{146},$
$18 = 1 \cdot 41 - 1 \cdot 23 =$
$\quad = (1+3) \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(-5-16) \cdot \mathbf{146} =$
$\quad = 4 \cdot \mathbf{771} - 21 \cdot \mathbf{146},$
$5 = 1 \cdot 23 - 1 \cdot 18 =$
$\quad = (-3-4) \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(16+21) \cdot \mathbf{146} =$
$\quad = -7 \cdot \mathbf{771} + 37 \cdot \mathbf{146}$
$3 = 1 \cdot 18 - 3 \cdot 5 =$
$\quad = (4+21) \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(-21-111) \cdot \mathbf{146}$
$\quad = 25 \cdot \mathbf{771} - 132 \cdot \mathbf{146},$
$2 = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3$
$\quad = (-7-25) \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(37+132) \cdot \mathbf{146} =$
$\quad = -32 \cdot \mathbf{771} + 169 \cdot \mathbf{146},$
$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 =$
$\quad = (25+32) \cdot \mathbf{771} +$
$\qquad +(-132-169) \cdot \mathbf{146} =$
$\quad = 57 \cdot \mathbf{771} - 301 \cdot \mathbf{146},$
$\quad (= 43947 - 43946).$

Poszukiwanymi liczbami okazały się 57 i (-301).
Przy okazji warto zauważyć, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić jako

$$k \cdot \mathbf{771} + l \cdot \mathbf{146}$$

dla pewnych całkowitych k i l.