Coroczne sukcesy młodych polskich matematyków w finałach Europejskiego Konkursu zachęcają do wysunięcia następującej nieśmiałej hipotezy: złoty medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki, poparty wiarą w siebie i wyszlifowaną angielskojęzyczną wersją pracy, pozwala przy odrobinie szczęścia na zdobycie przynajmniej trzeciej nagrody w Konkursie Europejskim. Zobaczymy, czy hipoteza ta potwierdzi się w czasie finałów IX Europejskiego Konkursu Prac Młodych Naukowców w Mediolanie, w dniach 9–14 września 1997 roku – być może weźmie w nich udział kolejny złoty medalista Konkursu Prac Uczniowskich, Michał Stukow z Gdańska (protokół z finału konkursu opublikowany jest w *Delcie* 1/1997). Skrót jego zwycięskiej pracy opublikujemy za miesiąc; teraz godzi się wspomnieć, że główny wynik polega – jak w przypadku T. Osmana i M. Kurowskiego – na ciekawym, nie znanym wcześniej uogólnieniu osiemnastowiecznego rezultatu „z nazwiskiem".

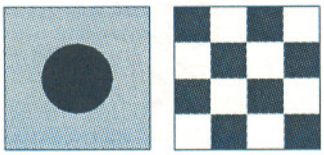
M. Stukow uogólnił, mianowicie, na przypadek czworokąta tzw. wzór Eulera, orzekający, że w dowolnym trójkącie promień okręgu opisanego R, promień okręgu wpisanego r i odległość d środków obu tych okręgów powiązane są zależnością $d^2 = R^2 - 2Rr$. Okazuje się, że jeśli (skądinąd dowolny) czworokąt ma tę własność, że można zarówno opisać na nim okrąg, jak i wpisać weń okrąg, to wtedy odległość d środków obu okręgów wyraża się wzorem

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$$

(R i r oznaczają, odpowiednio, promienie okręgu opisanego i wpisanego).

Redaktorom *Delty*, nie licząc wszelkich innych ważniejszych powodów, choćby i metryka nie pozwala marzyć o zdobywaniu laurów w Europejskim Konkursie, przeznaczonym dla osób w wieku 15–21 lat. Czytelników w odpowiednim wieku, którzy mają w dodatku pomysły, umiejętności i dobre chęci, zachęcamy do doświadczalnego weryfikowania naszej hipotezy. Wystarczy brać udział najpierw w jednym, a potem w drugim konkursie.

Szczegółowe informacje na temat warunków uczestnictwa w Europejskim Konkursie Prac Młodych Naukowców można uzyskać w biurze Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci (ul. Chocimska 14, 00-791 Warszawa).

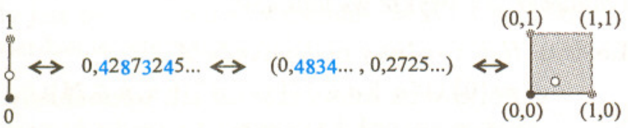


IN – Potrzebuję nurka.

Siła zbioru

Marcin KOWALCZYK i Marcin SAWICKI

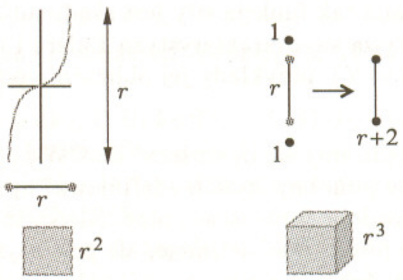
Zapewne wielu Czytelników *Delty* było kiedyś szczerze zaskoczonych dowiedziawszy się, że odcinek i kwadrat są zbiorami równolicznymi, czyli że istnieje między nimi bijekcja (rys. 1). Cóż dziwnego, skoro sam odkrywca tego faktu, Georg Cantor, miał napisać w swoim liście do Dedekinda: „widzę to, lecz nie wierzę w to" (cytat za [5]). Oba zbiory rozróżnia pojęcie wymiaru, lecz ono z kolei utożsamia np. odcinek otwarty z domkniętym, a ten ostatni ma przecież o dwa punkty więcej, nieprawdaż?



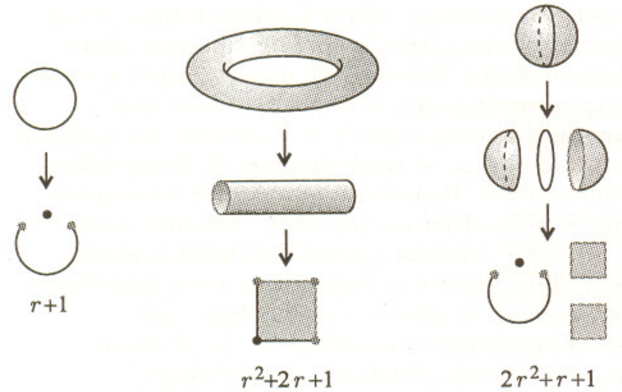
Rys. 1

W niniejszej pracy wprowadzamy pojęcie siły zbioru. Jest to charakterystyka pewnych zbiorów, uwzględniająca zasugerowane powyżej intuicje i będąca w istocie połączeniem wymiaru i charakterystyki Eulera. Siła zbioru będzie zawsze pewnym wielomianem jednej zmiennej r.

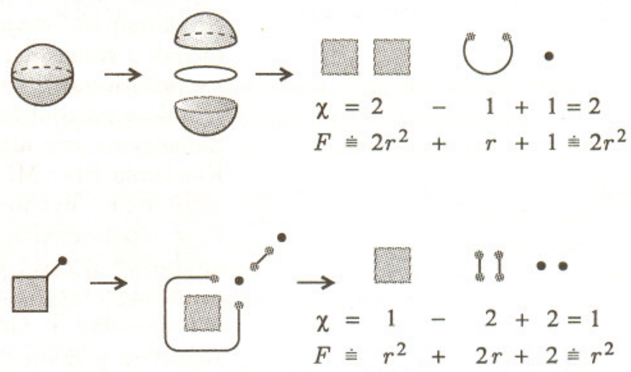
Spróbujmy na początek przyjąć, że siła zbioru liczb rzeczywistych jest równa r. Intuicja podpowiada wówczas, by siłę odcinka otwartego, odcinka domkniętego, kwadratu i kostki obliczyć tak, jak to pokazuje rysunek 2. Kolejne sugestie obliczenia siły, dla zbiorów bardziej skomplikowanych, przedstawia rysunek 3.



Rys. 2

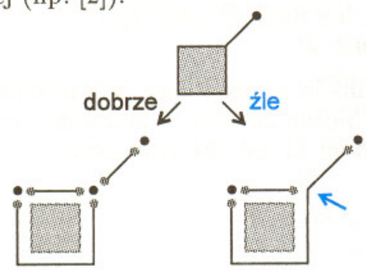


Rys. 3



Rys. 5

Uściślijmy te rozważania. Skończony CW-kompleks to, mówiąc obrazowo, przestrzeń, która jest sumą skończonej rodziny rozłącznych, „zachowujących się przyzwoicie" komórek (czyli zbiorów homeomorficznych z kostkami różnych wymiarów). W szczególności, skończony CW-kompleks jest zwarty, a brzeg każdej z komórek jest sumą podzbioru komórek o mniejszych wymiarach. Na rysunku 4 przedstawiamy, na czym to polega. Miłośnicy ścisłości zechcą zajrzeć do podręczników topologii algebraicznej (np. [2]).



Rys. 4

Na komórkach CW-kompleksu (e^m, dla $m \geq 1$, oznacza otwartą komórkę m-wymiarową; e^0 to punkt) określimy funkcję f o wartościach w pewnym zbiorze Y (z dodawaniem i mnożeniem) spełniającą warunek $f(e^{k+l}) = f(e^k) \cdot f(e^l)$. Siłę F definiujemy jako

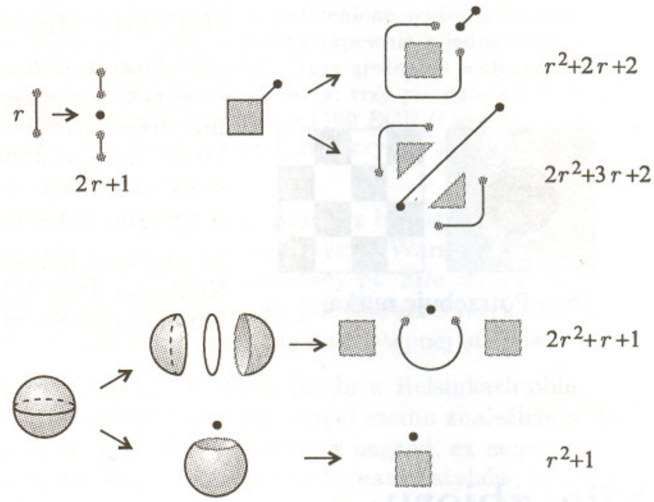
$$F(K) = \sum_K f(e^k)\,.$$

Sumowanie rozciąga się na wszystkie komórki tworzące kompleks K. Łatwo wykazać, że $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$ dla A, B rozłącznych, oraz $F(A \times B) = F(A) \cdot F(B)$.

Definicja jest dość ogólna; dobierając Y oraz f możemy otrzymać wiele różnych pojęć. Jeśli np. Y jest zbiorem liczb całkowitych, $f(\emptyset) = 0$, $f(e^k) = (-1)^k$, to otrzymana tak funkcja siły jest skądinąd dobrze znana: nazywa się charakterystyką Eulera i jest oznaczana $\chi(K)$; przykłady jej obliczania pokazuje rysunek 5.

O ile nie będziemy się ograniczać do CW-kompleksów, to można w podobny sposób zdefiniować np. miarę zbioru, prawdopodobieństwo, moc. Nie są to wprawdzie praktyczne definicje, ale pokazują ogólność wprowadzanego pojęcia.

Można sądzić, że do uściślenia definicji siły zasugerowanej na rysunkach 2 i 3 należy przyjąć za Y pierścień wielomianów zmiennej r i położyć $f(e^k) = r^k$, $f(\emptyset) = 0$. Rysunek 6 pokazuje, że nie jest to określenie jednoznaczne. Jak więc zmienić definicję?



Rys. 6

Zauważmy, że w podanych przykładach wszystkie siły danego zbioru są tego samego stopnia i w dodatku przystają modulo $(r+1)$. To spostrzeżenie pozwala rozwiązać problem. Niech $\overline{Y}$ będzie zbiorem wielomianów zmiennej r o współczynnikach całkowitych nieujemnych; odpowiedni dla naszych potrzeb zbiór Y otrzymujemy utożsamiając te wielomiany P i Q równego stopnia, których różnica dzieli się bez reszty przez dwumian $(r+1)$. Dla krótkości piszemy wtedy $P \doteqdot Q$. Elementy zbioru Y (dla wtajemniczonych: klasy abstrakcji relacji równoważności $\doteqdot$) można, oczywiście, mnożyć i dodawać jak zwykłe wielomiany.

Lemat. *Jeśli z rodziny wielomianów $\mathcal{F}$,*

$$\mathcal{F} = \{0\} \cup \{a \mid a \in \mathbf{N}\} \cup \{ar^n \mid a, n \in \mathbf{N}\} \cup \cup \{r^n + br^{n-1} \mid b, n \in \mathbf{N}\} \tag{1}$$

wybierzemy dwa różne wielomiany tego samego stopnia, to będą one przyjmować różne wartości w punkcie $r = -1$. Ponadto, dla każdego $n \in \mathbf{N}$ i każdego całkowitego m istnieje taki wielomian Q postaci (1) i stopnia n, że $Q(-1) = m$.

Dowód polegający na rozpatrzeniu kilku prostych przypadków pomijamy.

Twierdzenie. *Dla każdego wielomianu $P \in \overline{Y}$ istnieje dokładnie jeden wielomian Q należący do rodziny $\mathcal{F}$ określonej wzorem* (1) *o tej własności, że $P \doteqdot Q$.*

Dowód. Gdy wielomian $P = \text{const.}$, to teza jest oczywista. Gdy stopień P jest dodatni, to wybieramy wielomian Q tego samego stopnia i postaci (1) tak, by mieć $Q(-1) = P(-1)$. Na mocy Lematu wielomian Q jest określony jednoznacznie, a z twierdzenia Bezout wynika, że różnica wielomianów P i Q dzieli się bez reszty przez dwumian $(r+1)$. Zatem, $P \doteqdot Q$. ■

Definicji samej funkcji f nie musimy zmieniać; przyjmujemy nadal $f(e^k) = r^k$. Możemy już udowodnić

Twierdzenie. *Siła skończonego CW-kompleksu jest dobrze określona.*

Dowód. Pokażemy, że siła zbioru jest dobrze określona dla przestrzeni, których charakterystyka Eulera i wymiar (tzn. największy z wymiarów wszystkich komórek) są dobrze określone. Weźmy wielomian $F(A)$ obliczony dla konkretnego rozbicia $e^{k_1}, \ldots, e^{k_n}$ danego zbioru A oraz charakterystykę Eulera A:

$$F(A) = \sum_{i=1}^{n} r^{k_i}, \qquad \chi(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k_i}.$$

Jak widać, $\chi(A) = F(-1)$ (zob. też rys. 6). Ale charakterystyka Eulera $\chi(A)$ jest dobrze określona, toteż dla dwóch różnych rozbić zbioru A otrzymujemy wielomiany F_1, F_2 przyjmujące równe wartości w punkcie $r = -1$, czyli przystające modulo $(r+1)$. W dodatku stopnie tych wielomianów są równe (dobrze określonemu!) wymiarowi zbioru A. Zatem $F_1 \doteqdot F_2$, czyli wielomiany F_1 i F_2 określają ten sam element zbioru Y. ■

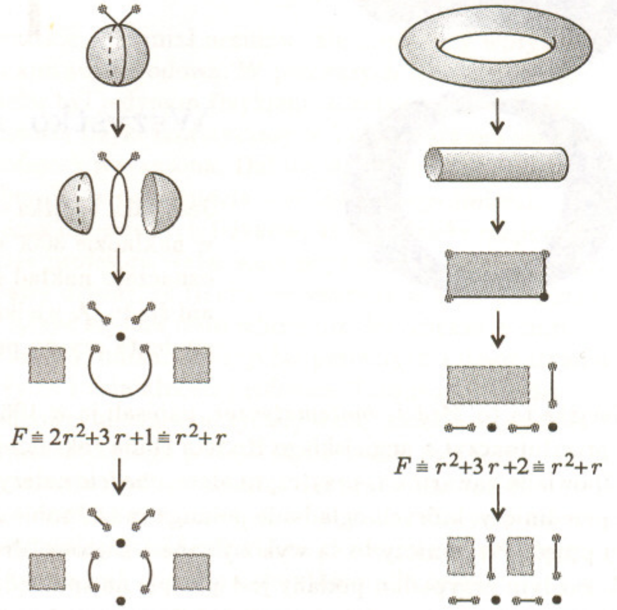
Wniosek. Znając wymiar zbioru A i jego charakterystykę Eulera, można siłę $F(A)$ określić jednoznacznie.

Uwaga. Charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem homotopii, ale wymiar nim nie jest, więc siła zbioru nie może być niezmiennikiem homotopii.

Jeśli dwa zbiory mają identyczne CW-kompleksowe rozbicia, to mają, oczywiście, równe siły. Pojęcie siły jest na tyle trafne i naturalne, że zachodzi także twierdzenie odwrotne.

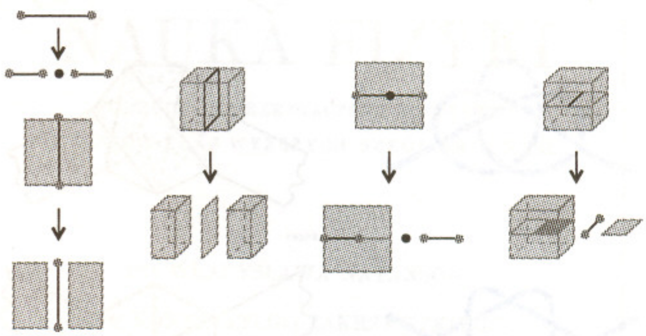
Twierdzenie. *Dla każdych dwóch zbiorów A i B mających równe siły istnieją identyczne rozbicia $A_1, \ldots, A_n$ zbioru A i $B_1, \ldots, B_n$ zbioru B (słowo „identyczne” oznacza, że oba zestawy komórek są identyczne).*

Działanie twierdzenia ilustruje rysunek 7. Zachęcamy Czytelników do próby samodzielnego przeprowadzenia nieco technicznego dowodu. Podamy tylko wskazówkę.



Rys. 7

Lemat. *Dla dowolnych $0 \leq m < n$ można rozłożyć kostkę e^n na trzy rozłączne zbiory: kostkę e^n, kostkę e^m i kostkę e^{m+1}* (patrz rys. 8).



Rys. 8

I jeszcze jedno: zbiór z lewej strony rysunku 7 nie jest CW-kompleksem. W istocie, charakterystyka Eulera i siła zbioru zdają się działać dla niektórych innych sytuacji, np. dla rozbić, które nie są CW-kompleksowe (por. rys. 4), albo rozbić zbiorów, które nie są zwarte. Autorzy nie wiedzą, jak rozszerzyć klasę CW-kompleksów tak, aby objąć i te przypadki.

Literatura

[1] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[2] A.T. Fomenko, D.B. Fuchs, V.L. Gutenmacher, *Homotopic topology*, Budapest 1986.

[3] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN 1965.

[4] R. Duda, *Wstęp do topologii*, PWN 1992.

[5] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN 1995.