

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 V 1997

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

**Zadania z matematyki nr 337, 338**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**337.** Niech  $\alpha = (i\sqrt{3} - 1)/2$ . Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f$  zmiennej zespolonej  $z$ , o wartościach zespolonych, spełniające równanie funkcyjne  $f(\alpha z + 1) + f(z) = z^2$ .

**338.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n = 0.$$

Zadanie 338 zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz z Warszawy.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1996**

Przypominamy treść zadań:

**329.** Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o następującej własności: dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych  $a, b$  prosta przechodząca przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  przecina oś rzędnych w punkcie  $(0, -ab)$ .

**330.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  liczba  $N = \prod_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j)$  jest podzielna przez  $n!$ .

**329.** Prosta przechodząca przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  przecina oś rzędnych w punkcie  $(0, w)$ , gdzie  $w = (af(b) - bf(a))/(a - b)$ . Jeśli funkcja  $f$  spełnia warunek zadania ( $w = -ab$ ), to kładąc  $a = 1$  obliczamy:  $f(b) = bf(1) + b(b - 1)$ . Zatem  $f$  ma postać  $f(x) = x^2 + cx$ . Na odwrót, łatwo sprawdzić, że każda funkcja takiej postaci (z dowolną stałą  $c$ ) spełnia postulowany warunek ( $w = -ab$ ).

**330.** Wystarczy dowieść, że dla każdej liczby pierwszej  $p$  oraz dla każdego wykładnika naturalnego  $k$  w ciągu liczb

$$(1) \quad 1, 2, \dots, n$$

jest nie więcej liczb podzielnych przez  $p^k$  niż jest ich w ciągu

$$(2) \quad 2^n - 1, 2^n - 2, 2^n - 4, \dots, 2^n - 2^{n-1};$$

stąd już bowiem będzie wynikało, że w rozkładzie na czynniki pierwsze iloczynu wyrazów ciągu (1) liczba  $p$  występuje w potęgde nie wyższej niż w rozkładzie iloczynu wyrazów ciągu (2), co wobec dowolności wyboru  $p$  da nam żadaną podzielność.

Jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą nieparzystą, to zgodnie z twierdzeniem Eulera

$$2^{\alpha_k} \equiv 1 \pmod{p^k} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$\alpha_k = \phi(p^k) = \left( \begin{matrix} \text{ilość liczb naturalnych } \leq p^k \\ \text{względnie pierwszych z } p^k \end{matrix} \right) = p^k - p^{k-1}.$$

Jeśli więc  $n - j$  dzieli się przez  $\alpha_k$ , to  $2^{n-j} \equiv 1 \pmod{p^k}$ , i wobec tego liczba  $2^n - 2^j = 2^j(2^{n-j} - 1)$  dzieli się przez  $p^k$ . Zatem w ciągu (2) jest co najmniej  $[n/\alpha_k]$  wielokrotności liczby  $p^k$ , podczas gdy w ciągu (1) jest ich dokładnie  $[n/p^k]$ ; nierówność  $[n/\alpha_k] \geq [n/p^k]$  oczywiście zachodzi, skoro  $\alpha_k < p^k$ .

Trzeba jeszcze rozpatrzyć  $p = 2$ . Ciąg (1) zawiera  $[n/2^k]$  liczb podzielnych przez  $2^k$ ; ciąg (2) zawiera ich  $n - k$ , jeśli  $k < n$ , a nie zawiera żadnej, jeśli  $k \geq n$ . Pozostaje więc wykazać, że

$$(3) \quad n/2^k \leq n - k \quad \text{dla } k < n.$$

To zaś wynika z monotoniczności ciągu  $(c_i = i/2^i: i = 1, 2, 3, \dots)$ : jeśli  $1 \leq k < n$ , to  $c_{n-k} \geq c_n$ , co jest równoważnym zapisem nierówności (3).



**Rozwiązanie zadania M 801.**

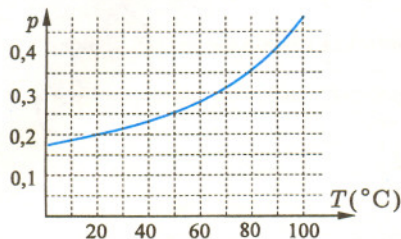
Rozważmy podzbiory zbioru  $J$ , które mają tę własność, że suma elementów każdego z nich jest równa sumie elementów  $J$ . Spośród nich (a istnieje co najmniej jeden taki podzbiór, mianowicie  $J$ ) wybierzmy ten, który ma najmniejszą liczbę elementów i nazwijmy go  $I$  (wybór  $I$  nie musi być jednoznacznie zdeterminowany).

Przedziały należące do zbioru  $I$  leżą na prostej w pewnym porządku (wszystkie mają długość 1, więc wystarczy brać pod uwagę położenie ich środków). Niech  $\mathcal{A}$  oznacza zbiór składający się z „co drugiego” (wg powyższego porządku) przedziału należącego do  $I$  i niech  $\mathcal{B} = I \setminus \mathcal{A}$ . Oczywiście, drugi warunek zadania jest spełniony.

Gdyby dwa różne przedziały należące do  $\mathcal{A}$  przecinały się, to pewne dwa kolejne przedziały należące do  $\mathcal{A}$  przecinałyby się, a wówczas leżący „między” nimi przedział  $I$  należałoby do  $I$  byłby zawarty w ich sumie (patrz rysunek).



Zatem suma elementów zbioru  $I \setminus \{p\}$  byłaby taka sama jak suma elementów zbioru  $I$  (równa sumie elementów zbioru  $J$ ), co przeczy minimalności zbioru  $I$ . W ten sam sposób dowodzimy, że przedziały należące do  $\mathcal{B}$  są parami rozłączne.



Rys. 1

**235.** Rozpuszczalność cukru (sacharozy) w wodzie szybko rośnie ze wzrostem temperatury – zob. rys. 1, gdzie odłożona na osi pionowej wielkość  $p$  jest stosunkiem mas cukru i wody w roztworze nasyconym. Wynika stąd dość paradoksalny wniosek, że dolewając czystej, zimnej wody do gorącego roztworu cukru w wodzie można doprowadzić do jego przesylenia i krystalizacji nadwyżki cukru. Obliczyć maksymalną temperaturę wody, której dolanie do nasyconego roztworu cukru o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  spowoduje krystalizację części cukru (choćby niewielkiej). Rozważyć dwa przypadki:  
a) dolewamy niewielką ilość wody,  
b) dolewamy ilość wody równą  $1/3$  początkowej ilości wody w roztworze.

Należy przyjąć, że ciepło pobrane lub oddane podczas zmiany temperatury roztworu jest równe sumie wyrażeni odpowiadających zmianie temperatury wody i cukru, przy czym ciepło właściwe cukru jest równe  $0,30$  ciepła właściwego wody, a oba ciepła właściwe nie zależą od temperatury. Pominąć efekty cieplne wynikające ze zmiany stężenia.

**236.** Napastnik biegnący w stronę bramki przeciwnika znajduje się na wprost niej i otrzymuje boczne podanie: piłka toczy się poziomo z prędkością  $25\text{ m/s}$  równoległe do linii bramkowej w odległości  $20\text{ m}$  od niej. Gdy napastnik kopie piłkę, jego noga porusza się do przodu z prędkością  $15\text{ m/s}$ . Ocenic orientacyjnie niezbędną do zdobycia bramki dokładność czasu  $\Delta t$ , w którym noga przekracza dowolną linię. Szerokość bramki wynosi  $7,3\text{ m}$ , a średnica piłki –  $22\text{ cm}$ . Pominąć rolę bramkarza i kwestie związane z wysokością poprzeczki i nogi.

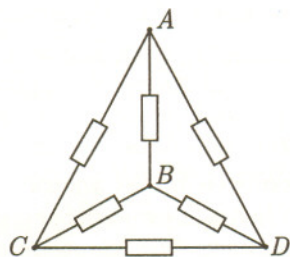
### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1996

Przypominamy treść zadań:

**227.** Wokół planety o masie  $M$  porusza się po okręgu księżyc o masie  $m$  i promieniu  $r$ , zwrócony do planety stale tą samą stroną. Jaki warunek musi spełniać promień  $R$  orbity księżyca (tzn. odległość środków obu ciał), aby kamienie leżące na powierzchni księżyca nie odrywały się od niego? Przyjąć, że planeta i księżyc są kuliste,  $M \gg m$  i  $R \gg r$ .

**228.** Z pięciu oporników o oporze  $R$  i jednego o oporze  $R'$  utworzono obwód przedstawiony na rysunku 2; wiemy, że  $R \neq R'$ , ale nie znamy tych wartości. Oporniki wyglądają identycznie, więc aby ustalić, który jest „odmieńcem”, mierzymy opór obwodu między dowolnie wybranymi węzłami (bez rozcinania połączeń i bez zwierania węzłów). W jaki sposób należy wykonywać te pomiary i jaka jest ich minimalna liczba gwarantująca możliwość wskazania opornika  $R'$  niezależnie od miejsca, gdzie jest ukryty?

Pytanie „poza konkursem”: czy dopuszczenie możliwości zwierania węzłów pozwoli wykonać zadanie mniejszą liczbą pomiarów?



Rys. 2

**227.** Stosując II zasadę dynamiki do ruchu planety i księżyca wyznaczamy w standardowy sposób prędkość kątową wzajemnego obiegu ciał  $\omega$

$$\omega^2 = \frac{G(m+M)}{R^3} \approx \frac{GM}{R^3}.$$

Rozpatrzmy kamień o masie  $\mu$  leżący na powierzchni księżyca w punkcie najbardziej odległym od planety. Będzie on pozostawał w spoczynku wtedy, gdy suma sił przyciągania go przez planetę i księżyc będzie większa od siły odśrodkowej (lub równa jej):

$$\frac{GM\mu}{(R+r)^2} + \frac{Gm\mu}{r^2} \geq \mu\omega^2(R+r).$$

Podstawmy tu  $\omega^2$  z poprzedniego wzoru oraz wprowadźmy przybliżenie

$$\frac{1}{(R+r)^2} \approx \frac{1}{R^2} - \frac{2r}{R^3}.$$

Po uproszczeniach otrzymujemy rozwiązanie w postaci warunku

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 \geq \frac{3M}{m}.$$

Łatwo sprawdzić, że warunek równowagi kamienia leżącego na księżycu w punkcie najbliższym planety ma identyczną postać. Spełnienie tego warunku gwarantuje też, że nie oderwą się od księżyca kamienie leżące w innych punktach.

Jeśli dodatkowo założymy, że gęstość planety i księżyca jest taka sama, to warunek ten przyjmie postać

$$R \geq \sqrt[3]{3}R_p \approx 1,442R_p,$$

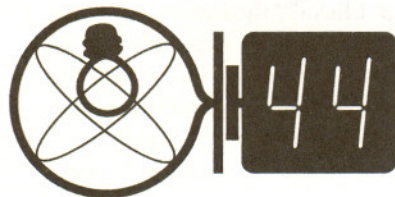
gdzie  $R_p$  jest promieniem planety. Otrzymany wynik dowodzi, że księżyc krążący zbyt blisko planety (wewnątrz tzw. strefy Roche'a) ulegnie rozerwaniu przez siły przyływu. Podawana w podręcznikach wartość promienia strefy Roche'a to  $2,455R_p$ ; różnica wynika stąd, że dopuszcza się możliwość płynnej zmiany kształtu księżyca, a nie tylko oderwania leżących kamieni od księżyca kulistego.

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 223 (WT=3,28), 224 (WT=2,26)  
z numeru 9/1996

Aleksander Surma	– Myszków	43,62
Przemysław Gworys	– Częstochowa	38,52
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	31,28
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	30,93

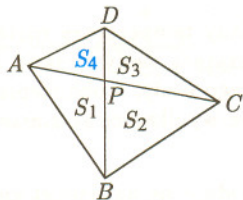




**Rozwiązanie zadania M 802.** Jeżeli dwa trójkąty mają wspólną wysokość, to stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw. Stosując to twierdzenie dwukrotnie widzimy (patrz rysunek), że

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AP}{PC} = \frac{S_4}{S_3}$$

Stąd, oczywiście,  $S_4 = S_1 S_3 / S_2$ .



**XT – Spodziewana jest zła pogoda.**

## Patrz w niebo

Merkury, najbliższa Słońca planeta, jest z natury rzeczy najsilniej wyprężonym globem w Układzie Słonecznym. Choć brzmi to nieprawdopodobnie, uzyskano niedawno argumenty za tym, że na biegunach Merkurego zalegają miejscami znaczne ilości wodnego lodu. Pierwsze informacje o tym pojawiły się w 1991 r., gdy przy obu biegunach planety stwierdzono obecność obszarów bardzo silnie odbijających fale radarowe. Dalsze badania potwierdziły, że tak odbijają fale radarowe może właściwie tylko lód.

Maksymalna temperatura gruntu na Merkurym przekracza  $550^{\circ}\text{C}$ , ale tak jest, oczywiście, w pasie równikowym, gdzie nasłonecznienie jest najsilniejsze. Od szerokości planetograficznej około  $\pm 80^{\circ}$  ku biegunom rozciągają się tereny charakteryzujące się tym, że wnętrza występujących tam kraterów nigdy nie są wystawione na bezpośrednie promienie Słońca. Te wiecznie ocienione miejsca nigdy nie osiągną temperatury wyższej niż  $-160^{\circ}\text{C}$ , przez co mogą stanowić przechowalnię zamarzającej wody pochodzącej bądź z wnętrza planety, bądź dostarczanej od przypadku do przypadku np. przez komety.

Okołobiegunowe obszary Merkurego są wprowadzić osłonięte przed Słońcem, lecz od czasu do czasu stają się widoczne z Ziemi, ponieważ orbita planety leży w płaszczyźnie tworzącej kąt  $7^{\circ}$  z płaszczyzną ekliptyki. Wtedy właśnie jest okazja wniknięcia

228. Są trzy możliwe wyniki pomiaru:

a) Gdy opornik  $R'$  leży między węzłami pomiarowymi (oznaczamy je literami  $A$  i  $B$ ), przez gałąź  $CD$  nie płynie prąd. Nietrudno sprawdzić, że opór jest wtedy dany wzorem  $R_1 = RR'/(R + R')$ .

b) Gdy opornik  $R'$  leży między węzłami  $C$  i  $D$ , prąd również tą gałęzią nie płynie, a opór między  $A$  a  $B$  wynosi  $R_2 = (1/2)R$ .

c) Gdy opornik  $R'$  zajmuje którekolwiek z pozostałych położań, obliczenie oporu między  $A$  a  $B$  jest nieco bardziej pracochłonne, a w wyniku otrzymuje się

$$R_3 = \frac{R(3R + 5R')}{8(R + R')}$$

Minimalną liczbą pomiarów jest 4. Należy rozpocząć od dwóch pomiarów, dla których jeden węzeł jest wspólny – np.  $AB$  i  $AC$ . W razie stwierdzenia, że  $R_{AB} = R_{AC}$ , łatwo dojść do wniosku, że opornik  $R'$  może się ukrywać tylko w dwóch miejscach: między  $A$  a  $D$  lub między  $B$  a  $C$ . Mierzmy opory  $R_{AD}$  i  $R_{BC}$ , tak że dysponujemy kompletem wartości  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , a korzystając ze związku

$$(*) \quad 4R_3 = R_1 + 3R_2$$

można ustalić, który ze zmierzonych oporów jest równy  $R_1$ , a który  $R_2$  – co kończy poszukiwania. Jeśli natomiast okazało się, że  $R_{AB} \neq R_{AC}$ , to jako trzeci zmierzmy opór  $R_{BD}$  (można wybrać inaczej). Gdy ten opór jest różny od obu poprzednich, to czwarty pomiar okazuje się niepotrzebny, gdyż znów mamy komplet wyników  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  i możemy postępować tak, jak powyżej. Gdy zaś  $R_{BD} = R_{AC}$  (przypadek  $R_{BD} = R_{AB} \neq R_{AC}$  jest niemożliwy), opornik  $R'$  może się ukrywać zarówno między  $A$  a  $B$ , jak między  $C$  a  $D$ , więc konieczny jest jeszcze pomiar  $R_{CD}$ .

Wprowadzenie możliwości zwierania dwóch lub trzech węzłów bardzo komplikuje zadanie. W zasadzie można tak dokonać pomiarów (wszystkie z jednym zwarcie), aby dopasowując wyniki do wzorów analogicznych do związku (\*) można było rozwiązać zadanie trzema pomiarami. Wzory te są jednak o wiele bardziej skomplikowane, a ponadto przy „złośliwym” dobrze stosunku  $R/R'$  rozwiązanie może nie być jednoznaczne.

falami radarowymi do wiecznie ciemnych wnętrza niektórych kraterów. Takie badania prowadzone były w latach 1991–92 za pomocą 300-metrowego radioteleskopu w Arecibo na Puerto Rico. Rozkład lodowych plam zgadzał się z konfiguracją biegunowych kraterów znaną od czasu, gdy Mariner 10 sfotografował powierzchnię planety. Dalsze prace polegały na badaniu zmian polaryzacji fal radarowych przy odbiciu od Merkurego. Używano do tego 70-metrowego radioteleskopu w Goldstone w Kalifornii. Potwierdzono w ten sposób, że fale odbijają się od lodu, gdyż podobne skutki oddziaływania fal radarowych z lodem obserwowano w przypadku czap polarnych Marsa oraz lodowych satelitów Jowisza. Lód w kraterach Merkurego ma co najmniej kilka metrów grubości, a przykrywa go zapewne kilkudziesięciocentymetrowa warstwa pyłu chroniąca go przed słabym, lecz nieustannym promieniowaniem z Kosmosu.

Uważa się, że gdyby dało się przebadać warstwy merkuriańskiego lodu „z bliska”, można by się wiele dowiedzieć o ewolucji wewnętrznych obszarów Układu Słonecznego. O lądowaniu tam człowieka nie ma jeszcze co marzyć, lecz – jak sugerują badacze – już umieszczenie na okołoplanetarnej orbicie sondy z aparaturą radarową przyniosłoby ogromne korzyści naukowe.

Tomasz KWAST