epsilon

3/97
(72)

Waldkowe rozwiązania zadań świątecznych

W *Delcie* 12/1996 redakcja *EPSILONA* zaproponowała Czytelnikom konkurs świąteczny prezentując pięć zadań nadesłanych przeze mnie. „Waldkowe zadania na święta" nie są oryginalne i większość z nich zaczerpnąłem z kanadyjskiego czasopisma *Crux Mathematicorum*. Być może część Czytelników dopiero teraz polubi te zadania, widząc „epsilonowe" rozwiązania.

1. *Sześć spośród ośmiu wierzchołków równoległościanu leży na jednej sferze. Czy równoległościan ten musi być prostopadłościanem?*

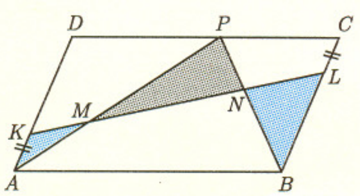
Nie. Na przykład wierzchołki dwóch sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prostego o podstawie równoległoboku leżą na jednej sferze. (Ściany boczne takiego graniastosłupa są prostokątami.)

2. *Na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$ tak obrano punkty K i L, że $AK = LC$. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym na boku CD. Prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N. Wykazać, że* pole$\triangle AKM$ + pole$\triangle BLN$ = pole$\triangle PMN$.

Dodając do obu stron powyższej równości pole czworokąta $ABNM$ (rys. 1) pozostaje do wykazania, że pole czworokąta $ABLK$ jest równe polu trójkąta ABP. A to już jest łatwe, bowiem obie te wielkości są równe połowie pola równoległoboku $ABCD$.

3. *Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano (w sposób dowolny) punkt P. Niech D, E, F będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Udowodnić, że suma pól trójkątów PAF, PBD, PCE nie zależy od wyboru punktu P.*

Przez punkt P prowadzimy trzy proste równoległe do boków trójkąta ABC (rys. 2). Teraz już nietrudno zauważyć, że suma pól trójkątów PAF, PBD, PCE jest równa połowie pola trójkąta ABC, czyli nie zależy od wyboru punktu P.



Rys. 1

4. *Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną. Czy istnieją liczby całkowite x, y, z, wszystkie różne od zera, spełniające równanie: $(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n})^2 = 2(x^{4n} + y^{4n} + z^{4n})$?*

Takie liczby nie istnieją. Dane równanie jest równoważne równaniu

$$(x^n+y^n+z^n)(-x^n+y^n+z^n)(x^n-y^n+z^n)(x^n+y^n-z^n)=0,$$

które, na mocy Wielkiego Twierdzenia Fermata, nie ma rozwiązań spełniających warunki zadania.

5. *Czy istnieją takie liczby naturalne $1 < k < l < n$, że liczby $\binom{n}{k}$ i $\binom{n}{l}$ są względnie pierwsze?*

Nie, nie istnieją! Z łatwej do sprawdzenia tożsamości $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k}$ wynika, że gdyby $\binom{n}{k}$ i $\binom{n}{l}$ były względnie pierwsze, to liczba $\binom{n}{k}$ musiałaby dzielić liczbę $\binom{n-l}{k}$. To jednak jest niemożliwe, gdyż $\binom{n-l}{k} < \binom{n}{k}$.

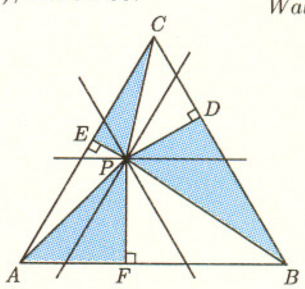
Autorem ostatniego zadania jest słynny węgierski matematyk Pál Erdős. Zwykł był on oferować (niekiedy bardzo wysokie) nagrody pieniężne za rozwiązania problemów matematycznych, z którymi sam się zmagał i których był autorem. Sam potrafił ocenić trudność danego problemu i oferować adekwatną sumę.

Na jednej z konferencji Erdős podzielił się powyższym problemem ze swoim przyjacielem, australijskim matematykiem, Georgem Szekeresem, zaznaczając, że nie zna rozwiązania i zadanie to może być nietrywialne. Podczas wykładu Szekeresowi udało się znaleźć rozwiązanie problemu Erdősa, podobne do powyższego. Na przerwie podszedł więc do autora zadania i z poważną miną powiedział:
– Wygląda mi to na interesujący problem. Ile zaoferowałbyś za rozwiązanie?
– Och, 5 dolarów... – odpowiedział bez wahania Erdős. *Muszę powiedzieć, że Paul mi zapłacił i był to jedyny raz, kiedy w ten sposób zarobiłem od niego pieniądze – niewątpliwie niezbyt uczciwie* – wspomina George Szekeres w liście do redaktora pisma *Crux Mathematicorum.*

Po 16 latach panowie spotkali się ponownie na konferencji w 1993 roku poświęconej 80. urodzinom Paula Erdősa. Erdős postawił ten sam problem raz jeszcze, po czym obaj z Szekeresem doszli do wniosku, że może on być niełatwy! Minęło kilka tygodni, zanim Erdős (przypadkowo, przeglądając swoje notatki) przypomniał sobie, że kilkanaście lat temu, razem z Szekeresem opublikowali to zadanie! Można o nim oraz o innych (otwartych) problemach dotyczących symboli Newtona przeczytać w pracy:

Paul Erdős, George Szekeres, *Some number theoretic problems on binomial coefficients*, Australian Math. Soc. Gazette **5(1978)**, str. 97–99.

Waldemar POMPE



Rys. 2