Minima i maksima z innej strony

Paweł STRZELECKI

Rozwiązanie zadania M 798.
Załóżmy, że równanie $f(x) = g(x)$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Wówczas funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$ jest ciągła i nie ma zer, więc albo przyjmuje tylko wartości dodatnie, albo tylko ujemne. Zatem

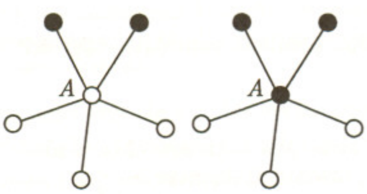
$$0 \neq h(f(x)) + h(g(x)) = \\ = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) = \\ = f(f(x)) - g(g(x)),$$

więc i równanie $f(f(x)) = g(g(x))$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Do czego mogą służyć minima i maksima? Większość polskich maturzystów uważa zapewne, że do gnębienia uczniów za pomocą zadań zaczynających się od słów *znajdź najmniejszą (największą) wartość....* Przykładów dostarczy dowolny zbiór zadań dla uczniów starszych klas liceum. Każdy maturzysta doda też, że rozwiązuje się takie zadania niemal mechanicznie, bez głębszego namysłu, a problemy mogą się pojawić tylko w rachunkach. Ot, bierze się odpowiednią funkcję, przyrównuje się do zera jej pochodną, sprawdza, że w znalezionym punkcie rozpatrywana funkcja rzeczywiście ma maksimum czy minimum, i po zabawie.

Przykłady nieoczekiwanego i skutecznego wykorzystania metody wariacyjnej można znaleźć np. w rozwiązaniu zadania **M 790** w *Delcie* 11/1996, albo w *Kąciku olimpijskim* z *Delty* 8/1996.

Stali Czytelnicy *Delty*, w szczególności miłośnicy *Kącika olimpijskiego*, wiedzą jednak, że minima i maksima mogą się zupełnie nieoczekiwanie przydać do rozwiązania również takich zadań i problemów, w których – ani na pierwszy, ani nawet na drugi rzut oka – nie chodzi wcale o znajdowanie minimów czy maksimów. Matematyka (i ta szkolna, i ta bardzo poważna) nie polega bowiem wcale na tym, by znać tysiące definicji i twierdzeń; wystarczy zamiast tego nauczyć się kilku (no, może kilkunastu) stosunkowo ogólnych i prostych metod, a następnie przyzwyczaić się do ich stosowania w najrozmaitszych sytuacjach. Jedną z takich uniwersalnych metod jest właśnie metoda wariacyjna; polega ona, mówiąc niezbyt ściśle, na znajdowaniu minimów lub maksimów odpowiednio dobranych funkcji. Zademonstrujemy niżej dwa – być może Czytelnikom do tej pory nie znane – ładne zastosowania tej metody.



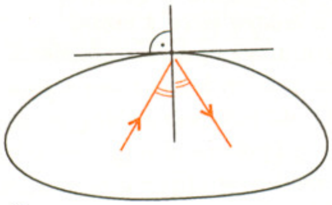
Rys. 1. Gdy przemalujemy wierzchołek A na kolor czarny, to wzrośnie liczba par różnokolorowych sąsiadów.

Oto przykład pierwszy. Zapytajmy, czy można tak pomalować wierzchołki dowolnego skończonego grafu kolorem czarnym i białym tak, by każdy wierzchołek miał wśród swoich sąsiadów przynajmniej połowę innego koloru niż on sam? Odpowiedź jest (o dziwo) twierdząca; ten fakt żartownisie nazywają twierdzeniem o unikaniu segregacji rasowej. Metoda wariacyjna pozwala podać uzasadnienie w pięciu słowach: trzeba *zmaksymalizować liczbę par różnokolorowych sąsiadów*. Dla leniwych wyłóżmy całą kawę na ławę: gdy graf ma n wierzchołków, to różnych jego czarno-białych pomalowań jest 2^n. Wśród nich istnieje oczywiście takie, że liczba par sąsiednich wierzchołków grafu pomalowanych różnymi kolorami jest największa z możliwych. Gdyby dla takiego pomalowania np. pewien biały wierzchołek grafu miał ponad połowę sąsiadów białych, to przemalowując ten wierzchołek na czarno zwiększylibyśmy liczbę par różnokolorowych sąsiadów (patrz rys. 1).

Mówimy, że zbiór D jest wypukły, jeśli dla wszystkich punktów $P, Q \in D$ odcinek PQ jest zawarty w D. Gładkość brzegu znaczy dla naszych potrzeb tyle: dla dowolnego punktu $A \in \partial D$ istnieje takie koło otwarte K o środku w A, że fragment ∂D zawarty w K jest (z dokładnością do izometrii) wykresem pewnej różniczkowalnej w sposób ciągły funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Drugi przykład będzie nieco poważniejszy. Podamy szkic dowodu twierdzenia Birkhoffa o bilardach. Rolę stołu bilardowego odegra wypukły podzbiór D płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ z gładkim brzegiem ∂D. Bila to po prostu punkt, poruszający się po stole po linii prostej aż do momentu dojścia do brzegu stołu – wówczas odbija się tak, by kąt padania był równy kątowi odbicia (patrz rys. 2). Zachodzi wówczas następujące ogólne i przepiękne

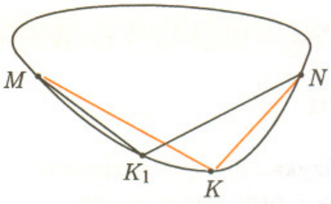
Twierdzenie (Birkhoff). *Dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje w D zamknięta trajektoria bilardowa złożona z dokładnie n różnych odcinków o końcach należących do brzegu ∂D obszaru D.*



Rys. 2.

Innymi słowy, dla każdego n można położyć bilę w pewnym punkcie stołu i uderzyć tak, by dokładnie po n odbiciach od brzegu stołu wróciła (z przeciwnego kierunku) do punktu wyjścia.

Do dowodu potrzebny będzie prosty



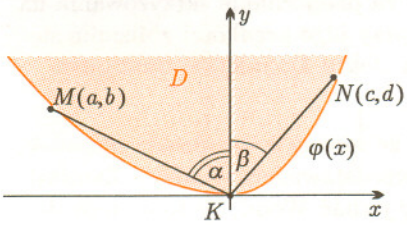
Rys. 3

Lemat. *Niech M i N będą (różnymi) ustalonymi punktami brzegu ∂D obszaru D i niech K leży na ∂D między M i N. Jeśli kąty padania i odbicia utworzone w punkcie K przez odcinki MK i KN nie są równe, to wówczas blisko K istnieje na brzegu obszaru D taki punkt K_1* (patrz rys. 3), *że*

$$MK_1 + K_1N > MK + KN\,.$$

Odłóżmy na chwilę dowód lematu i pokażmy, w jaki sposób wynika z niego twierdzenie Birkhoffa. Rozpatrzmy wszystkie n-kąty wpisane w D. Istnieje wśród nich taki, który ma największy obwód. Nie jest to wprawdzie fakt całkowicie oczywisty, ale zdoła go uzasadnić każdy, kto słyszał przynajmniej raz w życiu, że funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy. Ów n-kąt o najdłuższym z możliwych obwodzie – nazwijmy go $A_1A_2\ldots A_n$ – to właśnie poszukiwana trajektoria bili. Istotnie, gdyby np. kąty padania i odbicia utworzone w punkcie A_1 przez odcinki A_nA_1 i A_1A_2 były różne, to zgodnie z lematem można by punkt A_1 tak nieco przesunąć po brzegu ∂D obszaru D, by wzrosła suma długości odcinków A_nA_1 i A_1A_2. Wówczas wzrośnie jednak także obwód wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$, a to jest sprzeczność.

Pozostaje zatem udowodnić lemat. Dokonajmy najpierw niezbędnych przygotowań technicznych. Wprowadźmy w tym celu układ współrzędnych na płaszczyźnie tak, by $K=(0,0)$, $M=(a,b)$, $N=(c,d)$. Załóżmy też, bez zmniejszenia ogólności, że oś OX pokrywa się ze styczną do ∂D w punkcie K. Następnie sparametryzujmy brzeg obszaru D w otoczeniu punktu K. Weźmy w tym celu niewielką liczbę dodatnią ε i przyjmijmy, że $\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbf{R}_+$, $\varphi(0)=0$, jest funkcją gładką, której wykres zawiera się w brzegu obszaru D. To już koniec przygotowań. Przechodzimy do rzeczy i definiujemy funkcję (patrz rys. 4)



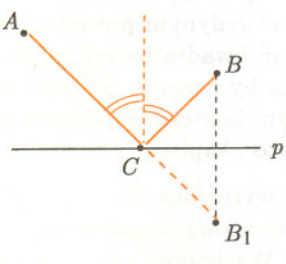
Rys. 4

$$S(x) := \sqrt{(-a+x)^2+(b-\varphi(x))^2}+\sqrt{(c-x)^2+(d-\varphi(x))^2}\,.$$

Jak widać, $S(x)$ jest po prostu sumą odległości punktów M i N od punktu $(x,\varphi(x))$ leżącego na ∂D. Okazuje się, że pochodna $S'(0)$ jest równa różnicy sinusów kątów padania i odbicia. Rachunek jest prosty, trzeba tylko pamiętać, że $\varphi'(0)=0$, bowiem styczna w punkcie K do wykresu φ, czyli do brzegu obszaru D, to oś OX. Oto szczegóły:

$$S'(0)=\frac{-a-b\varphi'(0)}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{-c-d\varphi'(0)}{\sqrt{c^2+d^2}}=$$
$$=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sin\alpha-\sin\beta\,.$$

Ponieważ kąty padania α i odbicia β nie są równe, więc $S'(0)\neq 0$. Zatem, w małym otoczeniu zera istnieją wartości x, dla których mamy $S(x)>S(0)$. Na przykład, w sytuacji przedstawionej na rysunku nierówność ostra $S(x)>S(0)$ zachodzi dla wszystkich odpowiednio małych dodatnich wartości x. Tym samym dowód lematu jest zakończony. (Kto zauważył, gdzie skorzystaliśmy z wypukłości D?)



Rys. 5

Tym, którzy cierpliwie dobrnęli niemal do końca artykułu, przypomniało się, być może, szkolne zadanie z geometrii: na prostej p wskazać taki punkt C, by suma jego odległości od dwóch zadanych, leżących po jednej stronie p punktów A i B była najmniejsza z możliwych (patrz rys. 5). Wiadomo dobrze, że C należy wybrać tak, by kąty padania i odbicia utworzone przez odcinki AC i CB były równe. Fizyk powiedziałby może, że to przykład stosowania metody wariacyjnej w optyce, i że można też metodą wariacyjną udowodnić prawo załamania światła (patrz *Delta* 9/1995, a także zadanie **F 446**).

Metody wariacyjne można napotkać, gdy się studiuje najrozmaitsze obiekty matematyczne. Opisywanie wszystkich po kolei i z osobna przypominałoby opisywanie po kolei pojedynczych drzew w lesie, nie będziemy więc tego robić.