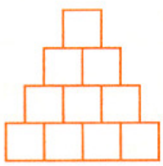
Liczby trójkątne

Rys. 1

Podstawowa zasada budowania stabilnej konstrukcji z klocków polega na tym, by klocek z kolejnej warstwy leżał na dwóch klockach z warstwy poprzedniej (jak na rys. 1). Ile klocków potrzeba, by zbudować taką stabilną ścianę stojącą na dwóch klockach? Niewiele. Dwa klocki w podstawie, jeszcze jeden na nich i to wszystko. Razem trzy. A jeśli zaczniemy od trzech? Trzy, na nich dwa, a na nich jeszcze jeden, razem sześć. Widać, że w trakcie obliczenia możemy wykorzystać znany nam już wynik poprzednich rachunków: okazało się, że po ułożeniu podstawy mamy na niej postawić ściankę o podstawie krótszej o jeden klocek. Nietrudno zauważyć, że tak będzie zawsze. Zaczynając od podstawy z n klocków, w następnej warstwie musimy ułożyć ich $n-1$. Wiedząc, ile klocków potrzeba dla $(n-1)$-klockowej podstawy, łatwo możemy obliczyć liczbę klocków potrzebnych dla ścianki o podstawie złożonej z n klocków.



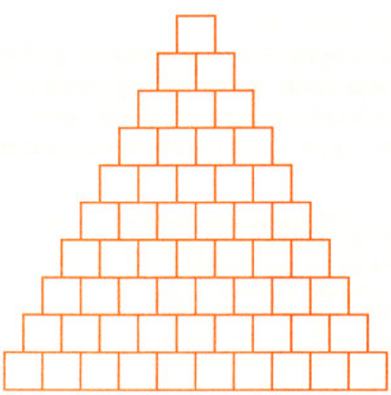
Rys. 2

Oznaczmy przez t_n ową liczbę dla ścianki o podstawie n. Oczywiście $t_1 = 1$, a $t_n = t_{n-1} + n$ dla $n > 1$ (możemy się jeszcze dodatkowo umówić, że $t_0 = 0$, bo przecież do ścianki o podstawie 0 potrzeba 0 klocków). Tak więc $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (rys. 2) i tak dalej. Można się domyślać, że t_n jest zawsze sumą liczb naturalnych od 1 do n (dla $n > 0$) – i rzeczywiście tak jest. Czytelnik znający indukcję może ją wykorzystać do wykazania, że dla każdej liczby naturalnej n, $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (podobno ten wzór wymyślił młody Gauss, gdy nudził się na lekcji matematyki).

Pobawmy się chwilę takimi liczbami, zwanymi *liczbami trójkątnymi* ze względu na kształt ścianki z klocków. Oczywiście, nie każda liczba naturalna jest trójkątna (np. 4 i 5 nie są), ale czy można każdą liczbę naturalną wyrazić za ich pomocą? Też pytanie: przecież widać, że $n + 1 = t_{n+1} - t_n$ (i oczywiście, $0 = t_0$). Różnica dwóch sąsiednich liczb trójkątnych jest więc wyjątkowo prosta. Z sumą może być gorzej, ale spróbujmy. Wiemy już, że $t_{n+1} + t_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$. Liczymy szybko (np. wyciągając $\frac{n+1}{2}$ przed nawias) i okazuje się, że $t_{n+1} + t_n$ to po prostu $(n+1)^2$. Układa nam się całkiem niezła arytmetyka liczb trójkątnych, więc idźmy dalej. Z naszych rachunków wynika natychmiast, że $(n+1)^3$ to po prostu $(t_{n+1} + t_n) \cdot (t_{n+1} - t_n)$, czyli $t_{n+1}^2 - t_n^2$. Bardzo sympatycznie. Czy można to wykorzystać w „normalnej” matematyce? Można. Wiemy już, czemu równa się suma kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. A czemu równa się suma ich trzecich potęg? Zaprzęgnijmy do pracy nasze specjalne liczby:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(t_1^2-t_0^2)+(t_2^2-t_1^2)+\ldots+(t_{n-1}^2-t_{n-2}^2)+(t_n^2-t_{n-1}^2).$$

Widać, że prawie wszystkie liczby trójkątne po prawej stronie zredukują się i zostanie tylko $t_n^2 - t_0^2$. Ale $t_0^2 = 0$, więc ostatecznie nasza suma jest równa t_n^2, czyli $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.



Rys. 3

Gdyby ktoś Wam zaproponował kiedyś dowód indukcyjny wzoru na sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych, zapytajcie go, czy zna liczby trójkątne. A jeśli chcecie dowiedzieć się o nich paru ciekawostek, zajrzyjcie do książki *Śladami Pitagorasa* Szczepana Jeleńskiego, która już wiele pokoleń młodych ludzi wprowadziła do matematyki.

Odpowiedz bez liczenia Czytelniku: czy liczba trójkątna jest wyższa czy szersza?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL