

# Konwekcja

Grzegorz DERFEL

Konwekcja cieplna w cieczech i gazach jest zjawiskiem bardzo powszechnym. Występuje w wielu skalach. Na co dzień towarzyszy nam przy podgrzewaniu wody w czajniku, ale także kształtuje klimat na Ziemi, przyczynia się do ruchu kontynentów i odgrywa wielką rolę w procesach zachodzących we wnętrzu gwiazd. Konwekcyjne przemieszczanie masy wywołane jest siłą wyporu wynikłą z różnicy gęstości ciepłych i chłodnych obszarów płynu.

Na istnienie konwekcji zwrócił uwagę Benjamin Rumford w 1797 r. Numeryczne symulacje konwekcji w atmosferze, przeprowadzone przez Edwarda Lorenza w roku 1963, uświadomiły nieprzewidywalność zjawisk opisanych deterministycznymi równaniami. Współczesne zainteresowanie konwekcją wiąże się właśnie z badaniami nad chaosem deterministycznym.

U źródeł konwekcji leży przekazywanie ciepła, a więc proces dysypatywny, czyli proces, w którym energia mechaniczna jest rozpraszana. Jego konsekwencją jest zaburzenie spoczywającej cieczy i samorzutne zorganizowanie się przestrzenne ośrodka. Komórki konwekcyjne, tworzące okresowy wzór, są przykładem tak zwanych struktur dysypatywnych. Rozwój tych struktur, ich komplikowanie się, prowadzi do zachowania chaotycznego – turbulencji. Charakteryzują ją przepływy o wielkiej rozmaitości skal długości i czasu. W zależności od parametrów cieczy i geometrii eksperymentu obserwuje się różne scenariusze przejścia od najprostszych struktur laminarnych do chaosu. Te frapujące zjawiska są spopularyzowane w wielu opracowaniach.

Tu chciałbym skupić się raczej na mechanizmach wiodących do niestabilności niż na ogólnych prawach rządzących jej rozwojem. Poświęcę uwagę konwekcji zachodzącej w małej, laboratoryjnej skali, w której charakterystyczna długość jest rzędu 0,001–0,01 m. Zacznę od opisu konwekcji w zwykłych płynach, a następnie przedstawię zjawiska występujące w cieczech szczególnego rodzaju, których cechą wyróżniającą jest anizotropia wielu właściwości fizycznych: w nematykach. Jest to jedna z klas licznej grupy związków organicznych zwanych ciekłymi kryształami. (Substancje te znane są już Czytelnikom *Delty*.) Pokażę, jak na przebieg ogólnie pojętych niestabilności o charakterze konwekcyjnym wpływa właściwa ciekłym kryształom anizotropia lepkości i przewodnictwa cieplnego. Należy też podkreślić, że dzięki dwójłomności ciekłych kryształów zjawisko to jest w nich szczególnie dobrze widoczne i efektowne.

## Ciecze zwykle

Warunki powstania konwekcji zależą od kształtu objętości zajmowanej przez ciecz, rozkładu temperatur i przyspieszenia grawitacyjnego. Wszelkie niejednorodności sprzyjają wystąpieniu przepływu.

Rozpatrzmy poziomą warstwę cieczy ogrzewaną od dołu. W ogólnym przypadku temperatura może być funkcją wszystkich trzech współrzędnych. Równowaga mechaniczna jest wtedy niemożliwa. Ciecz cieplejsza – o mniejszej gęstości – wznosi się i po oddaniu ciepła przy górnej, chłodzonej powierzchni, opada. Dostatecznie duże przewodzenie ciepła wzdłuż warstwy utrudnia powstanie konwekcji.

Z najprostszym przypadkiem konwekcji mamy do czynienia w tak zwanym problemie Bénarda, w którym pozioma warstwa cieczy ograniczona jest z góry i z dołu płaszczyznami o ustalonych, wszędzie jednakowych temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ . Właśnie dla takiego układu Henri Bénard przeprowadził w 1900 roku pierwsze systematyczne doświadczenia demonstrujące powstawanie niestabilności. Ich interpretację teoretyczną dał w fundamentalnej pracy z roku 1916 lord John W.S. Rayleigh, rozpatrując wyidealizowany przypadek warstwy nieskończenie rozległej o grubości  $d$ .

W opisie teoretycznym stan cieczy zadany jest przez pola prędkości i temperatury. Wielkości te określone są trzema równaniami: równaniem Naviera–Stokesa, będącym równaniem ruchu cieczy, równaniem ciągłości, wyrażającym zachowanie masy i równaniem przewodnictwa cieplnego. Warunki brzegowe ustalają wartości temperatur oraz nakładają ograniczenia na prędkość przy ścianach naczynia (lub na powierzchni swobodnej, jeśli taka istnieje). W tak zwanym przybliżeniu Boussinesqa zakłada się, że spośród parametrów cieczy jedynie jej gęstość zależy od temperatury.

W problemie Bénarda temperatura cieczy zależy tylko od współrzędnej pionowej. Stanowi to warunek konieczny równowagi. Transport ciepła odbywa się wówczas tylko dzięki przewodnictwu. Jednak nawet wtedy, gdy gradient temperatury jest pionowy, równowaga cieczy może zostać zaburzona. Następuje to, gdy małe fluktuacje temperatury, ciśnienia i prędkości cieczy mogą wzrastać nieograniczenie. Warunki po temu pojawiają się, gdy wartość gradientu (lub inaczej różnica temperatur  $\Delta T = T_2 - T_1$ ) przewyższa wielkość krytyczną. Elementy cieczy zostają wtedy wprawione w ruch. Stan cieczy określony jest bezwymiarową liczbą Rayleigha

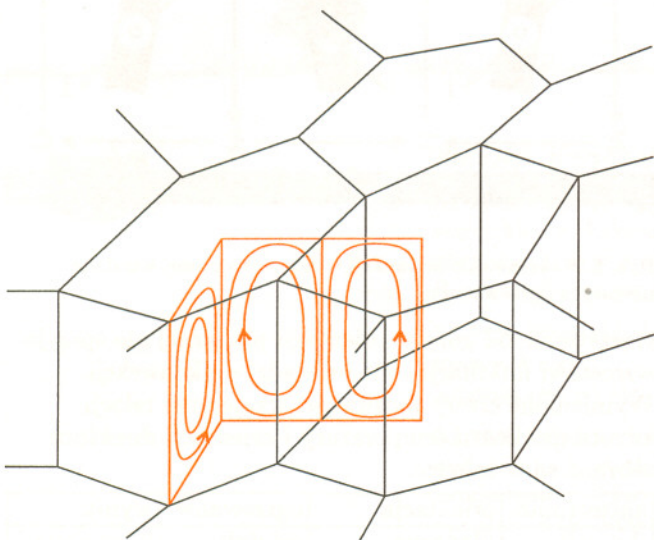
$$R = \frac{g\alpha\Delta T}{\kappa\nu}d^3,$$

gdzie:  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $\alpha$  – współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy,  $\kappa$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $\nu$  – współczynnik lepkości kinematycznej. Warunkom krytycznym na powstanie niestabilności odpowiada krytyczna wartość liczby Rayleigha  $R_c$ . Dla przypadku warstwy ograniczonej sztywnymi powierzchniami obliczenia dają  $R_c = 1707$ , co pozostaje w dobrej zgodności z wynikiem

doświadczalnym  $1700 \pm 50$ . Wartość ta wyznacza krytyczną różnicę temperatur

$$\Delta T_c = 1707 \frac{\kappa \nu}{g \alpha d^3}.$$

Rośnie ona silnie przy zmniejszaniu grubości  $i$ , na przykład, dla wody przy  $d = 1$  mm sięga ponad 100 K. Do zaobserwowania konwekcji konieczne są więc grubsze warstwy, zwłaszcza w przypadku cieczy bardziej lepkich niż woda. Ponieważ żaden kierunek w płaszczyźnie warstwy nie jest uprzywilejowany, przepływ odbywa się w komórkach, których podstawy muszą przybrać kształt wielokątów wypełniających całą warstwę bez luk. W praktyce spotyka się komórki sześciokątne. Rysunek 1 pokazuje charakter przepływu laminarnego w stanie stacjonarnym, gdy krytyczny gradient przekroczony jest nieznacznie. Zaznaczone są linie prądu cieczy w dwóch prostopadłych przekrojach komórki. Dostatecznie duży gradient wywołuje ruch turbulentny, do którego dochodzi po przejściu przez kilka stanów pośrednich.



Rys. 1. Przepływ cieczy izotropowej w sześciokątnych komórkach konwekcyjnych.

## Nematyki

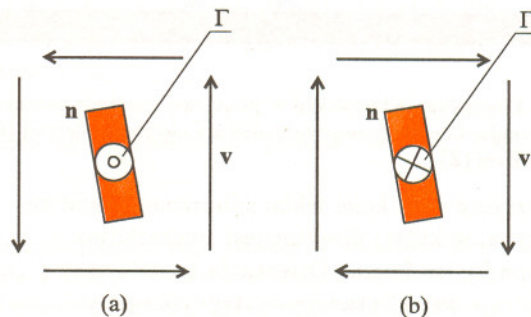
Niestabilności konwekcyjne w ciekłych kryształach nematicznych zostały szczegółowo zbadane na początku lat siedemdziesiątych. Sformułowany został także wtedy ich opis teoretyczny, w pełni zgodny z doświadczeniem. Dzięki anizotropii ciekłych kryształów progowy gradient temperatury jest o trzy rzędy wielkości mniejszy niż w zwykłej cieczy o zbliżonych parametrach. Można więc obserwować konwekcję w próbkach nematyka znacznie cieńszych niż warstwy, w których może pojawić się konwekcyjny przepływ zwykłych cieczy. Anizotropia powoduje, że proces powstawania niestabilności jest także bardziej złożony. Odgrywają w nim rolę trzy czynniki: anizotropia przewodnictwa cieplnego, orientacja direktora i anizotropia lepkości nematiczków.

Molekuły ciekłych kryształów są znacznie wydłużone; w typowym przypadku stosunek długości do szerokości molekuly wynosi około 6. Mają one tendencję do równoległego ustawiania się. Opisuje się to tzw. direktorem, tj. wektorem  $\mathbf{n}$  o jednostkowej długości skierowanym wzdłuż uśrednionego kierunku długich osi molekul; wektor ten określony jest z dokładnością do znaku. Uśrednienie przeprowadza się lokalnie, toteż  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  jest w istocie polem wektorowym na ogół zależnym od czasu. (Red.)

Przewodnictwo cieplne  $\kappa_{\parallel}$  w kierunku direktora  $\mathbf{n}$  jest większe niż przewodnictwa cieplne  $\kappa_{\perp}$  w kierunkach do niego prostopadłych. Anizotropię tego rodzaju mierzy się różnicą  $\Delta\kappa = \kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}$ . Jest ona dodatnia, a stosunek  $\kappa_{\parallel}/\kappa_{\perp}$  nieznacznie przewyższa jedność i wynosi np. 1,6.

Pierwotna orientacja direktora jest zwykle wymuszona oddziaływaniem ścian na molekuly ciekłego kryształu i rozprzestrzenia się na całą jego objętość.

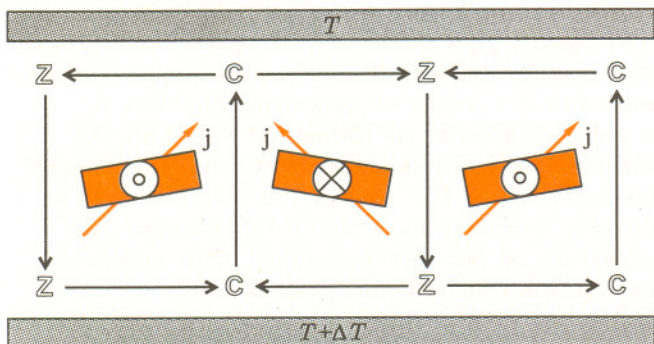
Każdemu przepływowi, a więc także konwekcji, towarzyszy wpływ momentów sił lepkości na orientację direktora (patrz *Delta* 10/1994). Zwrot wypadkowego momentu sił  $\Gamma$  zależy od ustawienia direktora  $\mathbf{n}$  w polu prędkości  $\mathbf{v}$ , jak również od relacji między różnymi współczynnikami lepkości nematyka. Moment ten może działać stabilizująco lub destabilizująco na direktor, to znaczy może tłumić lub wzmacniać jego odchylenie od pierwotnej orientacji. Obie możliwości przedstawia schematycznie rysunek 2.



Rys. 2. Moment sił lepkich  $\Gamma$  wzmacnia (a) lub tłumia (b) odchylenie direktora od pierwotnej pionowej orientacji. (Direktor  $\mathbf{n}$ , którego oba zwroty są fizycznie równoważne, przedstawiony jest w postaci zacieniowanego prostokąta.)

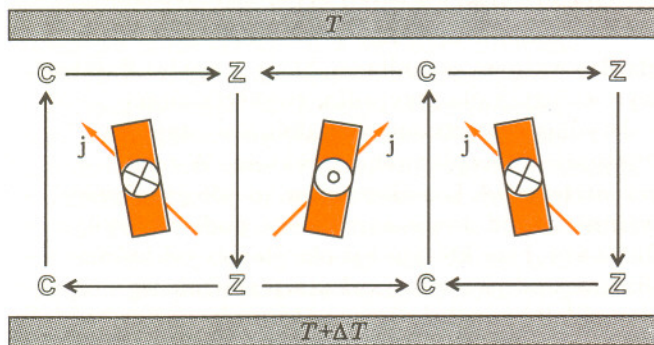
Bardzo ważnym czynnikiem, który – oprócz fluktuacji wymienionych dla przypadku zwykłych cieczy – decyduje o powstaniu niestabilności, stają się fluktuacje uporządkowania direktora. W celu rozpatrzenia ich konsekwencji w sposób jakościowy weźmiemy pod uwagę najprostszy, podstawowy typ fluktuacji, przy którym kąt określający odchylenie direktora od pierwotnej orientacji zmienia się sinusoidalnie wzdłuż pewnego kierunku w warstwie. Zaburzenie takie sprawia, że wektory strumienia ciepła  $\mathbf{j}$  nie są równoległe do gradientu temperatury, lecz nachylone w kierunku direktora. Pojawiają się więc składowe wektora strumienia ciepła mające przeciwne zwroty w sąsiadujących ze sobą obszarach. Dają one tak zwany efekt ogniskowania ciepła, w wyniku którego tworzą się rozlokowane na przemian masy cieczy cieplejszej i chłodniejszej. Siła wyporu sprawia, że masy te dążą do góry lub do dołu.

Rozważmy dwie podstawowe orientacje warstwy ciekłokrystalicznej. W pierwszej z nich dyrektor jest wstępnie ustawiony w jednakowym wszechdzie kierunku równoległe do ścian. (Jest to tak zwana orientacja planarna.) Dolna ścianka ma temperaturę o  $\Delta T$  wyższą od górnej. W stanie równowagi wektor strumienia ciepła jest prostopadły do warstwy. Rysunek 3 przedstawia sytuację panującą w warstwie o lekko zaburzone rozkładzie dyrektora. Kierunek dyrektora zmienia się sinusoidalnie. Można w niej znaleźć obszary, w których dyrektor będzie w takich samych warunkach, jak pokazane na rysunku 2a. Tutaj oznacza to, że zaburzenie będzie się wzmacniać, co doprowadzi do konwekcji.



Rys. 3. Powstawanie konwekcji w planarnej warstwie nematyka ogrzewanej od dołu. Zaznaczono obszary cieplejszej (C) i zimniejszej (Z).

Przyjrzyjmy się z kolei lekko zaburzonej warstwie nematyka, w której dyrektor jest początkowo prostopadły do ścian. (Orientacja ta nosi nazwę homeotropowej.) Sytuację występującą przy ogrzewaniu od dołu przedstawia rysunek 4.

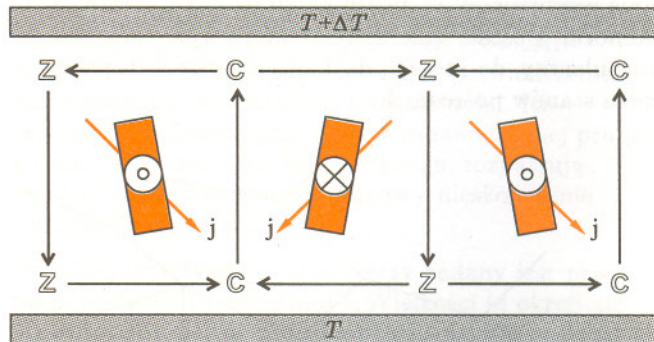


Rys. 4. Tłumienie konwekcji w homeotropowej warstwie nematyka ogrzewanej od dołu.

Dyrektor jest tu pod działaniem takich momentów sił lepkości, jak na rysunku 2b. Oznacza to, że nawet gdyby wystąpił konwekcyjny przepływ (dzięki ogniskowaniu ciepła wynikiem z fluktuacji dyrektora), to stłumi on przyczynę, dzięki której powstał.

Przy ogrzewaniu od dołu wystąpienie konwekcji jest możliwe tylko w bardzo grubych warstwach homeotropowych. Wówczas wpływ anizotropii może być pokonany zastosowaniem dostatecznie dużego gradientu temperatury dzięki efektowi właściwemu dla cieczy zwykłych.

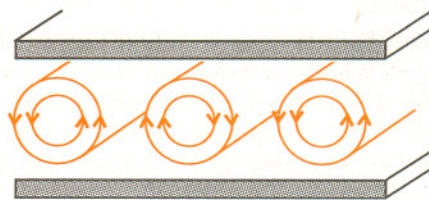
Inaczej jednak rozwinie się zjawisko, gdy homeotropowa warstwa nematyka będzie ogrzewana od góry (rys. 5). Wówczas działanie momentów sił lepkości będzie destabilizujące. Mamy tu więc do czynienia z konwekcją, ale „do góry nogami”. Zwykła ciecz byłaby w takiej sytuacji, oczywiście, w stanie równowagi trwałej.



Rys. 5. Powstawanie konwekcji w homeotropowej warstwie nematyka ogrzewanej od góry.

Ogrzewanie od góry w orientacji planarnej nie sprzyja wzrostowi fluktuacji i nie prowadzi do konwekcji. Wymienione cztery możliwości wzajemnej relacji zwrotu gradientu temperatury i orientacji dyrektora zebrane są w tabelce.

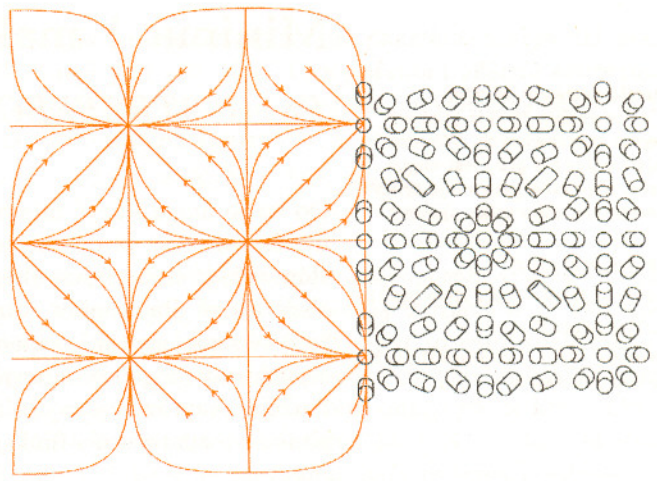
anizotropia	orientacja	ogrzewanie	wynik
$\Delta\kappa > 0$	planarna	od dołu	konwekcja
$\Delta\kappa > 0$	homeotropowa	od góry	konwekcja
$\Delta\kappa < 0$	planarna	od góry	stabilizacja
$\Delta\kappa < 0$	homeotropowa	od dołu	stabilizacja



Rys. 6. Rolki konwekcyjne w planarnej warstwie nematyka.

Przeptyw rodzi się zwykle jako para komórek konwekcyjnych w pobliżu jakiegoś defektu struktury. Rozwój konwekcji jest bardzo powolny: trwa kilkadziesiąt minut. W warstwie planarnej dobrze rozwinięta konwekcja ma postać równoległych rolek krążącej cieczy. Ich osie są prostopadłe do początkowego kierunku dyrektora (rys. 6).

Struktura ta widoczna jest w postaci jaśniejszych i ciemniejszych równoległych prążków. W warstwie homeotropowej wszystkie kierunki poziome są równouprawnione. Należy więc spodziewać się wielokątnych komórek konwekcyjnych. W doświadczeniach obserwuje się komórki kwadratowe jako wynik superpozycji skrzyżowanych rolek. Przepływ, jaki odbywa się w nich, przedstawiony jest na rysunku 7. Natomiast gdy przeważa izotropowy mechanizm utraty stabilności (na przykład przy dużym  $\Delta T$ ), obserwuje się heksagonalną sieć komórek konwekcyjnych.



Rys. 7. Kwadratowa sieć komórek konwekcyjnych. Przedstawiono, widzianą z góry, sytuację w płaszczyźnie odległej o  $1/4$  grubości od dolnej płyty. Po lewej – rzut linii prądu cieczy na płaszczyznę warstwy, po prawej – orientacja direktora.



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 798.** Funkcje ciągłe  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  spełniają równanie  $f(g(x)) = g(f(x))$  dla wszystkich  $x$ . Udowodnić, że jeśli równanie  $f(f(x)) = g(g(x))$  ma rozwiązanie, to także równanie  $f(x) = g(x)$  ma rozwiązanie.

Rozwiązanie na str. 6

**M 799.** Wykazać, że w poprzednim zadaniu nie można pominąć założenia ciągłości funkcji  $f$  i  $g$ .

Rozwiązanie na str. 16

**M 800.** Właściciel dużego sklepu składającego się z dziesięciu sektorów chce w nim umieścić 8 ukrytych kamer. Każda z nich pozwala z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  zarejestrować dokonywaną w jej sektorze kradzież, przy czym kamery działają niezależnie (w sektorze, w którym działa  $n$  kamer, kradzież pozostanie nie zarejestrowana z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2^n}$ ). Jakie rozmieszczenie kamer będzie najskuteczniejsze przy założeniu, że we wszystkich sektorach sklepu częstotliwość i dotkliwość kradzieży jest taka sama?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Krzysztof REJMER

**F 445.** Znaleźć tempo wydłużania się roku na skutek wypromieniowywania energii przez Słońce. Aktualna masa Słońca wynosi  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg, aktualna długość roku  $T = 3,16 \cdot 10^7$  s. Moc wypromieniowywana obecnie przez Słońce ma wartość  $P = 3,904 \cdot 10^{26}$  W. Zakładamy, że orbita Ziemi nie ulega zmianie.

Rozwiązanie na str. 16

**F 446.** Zgodnie z zasadą Fermata promień świetlny przechodzący przez dwa punkty  $A$  i  $B$  porusza się po trajektorii, wzdłuż której jego droga optyczna jest ekstremalna bądź stacjonarna. Rozważmy promień ulegające odbiciu od zwierciadła sferycznego wklęsłego o promieniu  $R$ . Niech  $A$  leży na osi optycznej zwierciadła w kształcie półsfery w odległości  $l$  od jej środka, a  $B$  znajduje się w środku sfery, z której wycięto zwierciadło. Znaleźć takie wartości  $l$ , dla których droga optyczna promienia spełniającego zasadę Fermata, jest:

- minimalna,
- maksymalna,
- stacjonarna.

Rozwiązanie na str. 14

