Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1996 upłynął 31 stycznia 1997). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 323 (WT=1,44) i 324 (WT=2,50) z numeru 6/1996

Lesław Skrzypek	– 3- 42,39
Tomasz Wietecha	– 2- 42,33
Adam Czornik	– 2- 41,29
Piotr Żmijewski	– 39,15
Krzysztof Zapisek	– 39,12
Tadeusz Józefczyk	– 2- 38,10
Bartłomiej Dyda	– 36,33
Tomasz Kulpa	– 1- 34,45
Jarosław Łazuka	– 33,94
Zbigniew Galias	– 1- 32,14
Konrad Patkowski	– 29,18
Andrzej Dudek	– 26,04
Jerzy Witkowski	– 1- 25,64
Wojciech Maciak	– 25,46
Jan Ciach	– 5- 24,98
Janusz Olszewski	– 3- 24,18
Witold Bednorz	– 24,13
Kazimierz Serbin	– 3- 23,34
Bogumiła Piotrowska	– 22,34
Michał Lewandowski	– 21,69
Marcin Sawicki	– 21,20
Mieczysław Jędrzejowski	– 21,10

Legenda (przykładowo): stan konta 5-24,98 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 24,98 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1994, 1995 lub 1996.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (5), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek, H. Kornacki (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

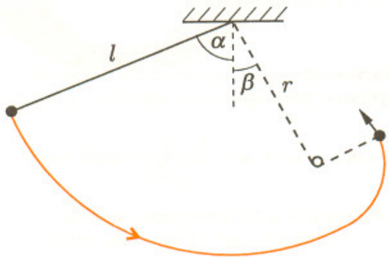
Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
„dwukrotni": Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski.

Zadania z fizyki nr 233, 234

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1997

233. Jeden koniec nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l jest unieruchomiony, a do drugiego przymocowano punktowe ciało, odchylono od pionu o kąt $\alpha < 90°$ i puszczono. W odległości r od punktu zawieszenia, pod kątem β do pionu (rys. 1) znajduje się sztywna i cienka poprzeczka, tak że gdy nić się o nią oparła, ciało poruszało się dalej na nici skróconej. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby po wzniesieniu się do góry ciało spadając uderzyło w poprzeczkę?



Rys. 1

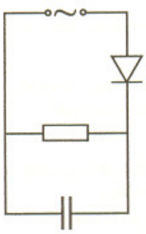
234. a) Do jednego końca metalowego pręta przyczepiono kuleczkę wosku, a drugi koniec umieszczono w płomieniu palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby pręt był dwukrotnie dłuższy?
b) Kuleczkę wosku przyczepiono w wierzchołku metalowego wycinka kuli („wyciętego" np. przez powierzchnię stożkową o wierzchołku w środku kuli), a całą kulistą powierzchnię wycinka objęto płomieniem palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień kuli był dwukrotnie większy?
c) Kuleczkę wosku przyczepiono na osi metalowego wycinka walca („wyciętego" przez dwie półpłaszczyzny przechodzące przez oś walca), a całą boczną (cylindryczną) powierzchnię wycinka objęto płomieniem palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień walca był dwukrotnie większy?
Temperatura początkowa bryły nie ulega zmianie przy podwojeniu długości lub promienia. Dla uproszczenia należy pominąć odpływ ciepła do otoczenia.

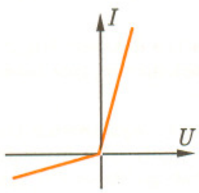
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1996

Przypominamy treść zadań

225. Kulkę upuszczono z pewnej wysokości H na szalkę wagi sprężynowej, od której odbiła się sprężyście, w wyniku czego szalka zaczęła drgać harmonicznie z amplitudą równą $(1/4)H$. Odbita kulka spadła ponownie i po drugim odbiciu wzniosła się na poziom początkowy (z którego została upuszczona). Dla jakiego stosunku mas kulki m i szalki M takie zdarzenie jest możliwe?

226. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody, opornika o oporze 100 Ω i kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Charakterystyka diody jest przedstawiona na rysunku 3 – w kierunku przewodzenia jej opór wynosi 10 Ω, a w kierunku zaporowym – 1000 Ω. Ile wyniesie napięcie na kondensatorze po upływie bardzo długiego czasu? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.


Rys. 2



Rys. 3

225. Prędkość kulki w chwili pierwszego uderzenia o szalkę była równa $v = \sqrt{2gH}$. Stosując zasady zachowania pędu i energii znajdujemy prędkości szalki v_1 i kulki v_2 natychmiast po odbiciu:

$$v_1 = v\frac{2m}{M+m}, \qquad v_2 = v\frac{M-m}{M+m}.$$

Aby po drugim odbiciu kulka podskoczyła na początkową wysokość, musi ono przebiegać odwrotnie względem pierwszego, tzn. oba zajdą na tej samej wysokości i kulka przejmie całą energię, pozostawiając szalkę nieruchomą w położeniu równowagi. Tak się stanie pod warunkiem, że od pierwszego do drugiego odbicia upłynie 1/2 okresu drgań szalki (lub 3/2, lub 5/2... – ogólnie $(n+\frac{1}{2})$ okresu). Z drugiej strony, czas ten musi być równy czasowi lotu kulki:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)T = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2v_2}{g},$$

gdzie ω jest częstością drgań szalki. Ponieważ maksymalna prędkość ruchu szalki jest związana z amplitudą A tożsamością $v_1 = \omega A$, otrzymujemy

$$v_1 v_2 = \pi g A\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Należy jeszcze podstawić $A = H/4$ oraz wyliczone na początku v_1 i v_2. Dla $n = 0$ z równania

$$16m(M-m) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(M+m)^2$$

znajdujemy dwie możliwe wartości ułamka m/M: 0,155 i 0,577. Dla $n > 0$ równanie nie ma rozwiązań.

226. Oznaczmy opór opornika przez R, opór diody w kierunku przewodzenia przez R_p, w kierunku zaporowym przez R_z, a szukane napięcie na kondensatorze przez U_1. Ustalenie się napięcia U_1 oznacza, że ładunek na kondensatorze zmienia się okresowo, powracając do wartości początkowej po upływie czasu T (okresu zmian napięcia źródła). Ładunek przepływający w tym czasie przez opornik jest równy różnicy między ładunkami przepływającymi przez diodę w kierunku przewodzenia i zaporowym

$$(*) \qquad \frac{U_1}{R}T = \frac{1}{R_p}\int (U(t) - U_1)\mathrm{d}t - \frac{1}{R_z}\int (U_1 - U(t))\mathrm{d}t,$$

gdzie $U(t)$ jest zmiennym napięciem źródła, a zakres całkowania jest dla każdej z całek (oznaczmy je symbolami I_1 i I_2) tą częścią okresu, w której wyrażenie podcałkowe jest dodatnie. Kładąc $U(t) = U_0\sin(\omega t)$ (lub $U_0\cos(\omega t)$) nietrudno wyliczyć całki analitycznie

$$I_1 = \frac{2}{\omega}\left(\sqrt{U_0^2 - U_1^2} - U_1\arccos(U_1/U_0)\right),$$

$$I_2 = \frac{2}{\omega}\left(\sqrt{U_0^2 - U_1^2} + U_1\frac{\pi}{2} + U_1\arcsin(U_1/U_0)\right).$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (*) należy wykorzystać związek $\frac{2}{\omega} = \frac{T}{\pi}$ i skrócić okres T. Wyznaczenie wartości U_1 następuje w wyniku obliczeń numerycznych – przy podanych wartościach oporów otrzymuje się $U_1 \approx 0{,}627\, U_0 \approx 18{,}8$ V.

W regulaminie **Klubu 44** została wprowadzona zmiana polegająca na wyraźniejszym rozdzieleniu klubu matematycznego i fizycznego. Jest to usankcjonowaniem przyjętego od dawna zwyczaju, zgodnie z którym podajemy oddzielne listy członków i weteranów obu klubów.

A oto najciekawsze rozwiązania i uwagi przysłane przez naszych Czytelników:

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 221 ($WT = 2{,}50$) i 222 ($WT = 2{,}38$) z numeru 6/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	47,94
Aleksander Surma	– Myszków	2- 42,16
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	1- 38,48
Przemysław Gworys	– Częstochowa	2- 37,06
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	31,28
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	25,72
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	1- 16,69
Stanisław Świątek	– Kłodzko	11,12
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 10,88

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1994–1996 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty. Prowadzący pan **Łazuka** właśnie dołączył do grona członków **Klubu 44 F** powiększając ich liczbę do 22.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Dzierżysław Lipniacki (3), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Paweł Perkowski (2), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1), Tomasz Wietecha (2).

Zadanie **203.** [Obrót „spadającego kota" składającego się z dwóch walców] (współczynnik trudności $WT = 3{,}03$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). Pan **A. Gawryszczak** oprócz bezbłędnego rozwiązania problemu zasadniczego podał też prawidłową odpowiedź na pytanie dodatkowe dotyczące walców obracających się z przeciwnym zwrotem. Okazało się, że w tym punkcie do rozwiązania zamieszczonego w *Delcie* 1/1996 wkradł się błąd polegający na nieuwzględnieniu odległości między walcami.

Zadanie **204.** [Ocenić maksymalny ładunek kulki stalowej, który nie spowoduje jej rozerwania] ($WT = 1{,}90$, $LPR = 4$). Prawidłowy wynik $Q \approx 10^{-4}$ C otrzymali **A. Nowogrodzki**, **A. Gawryszczak**, **A. Surma** i **J. Łazuka**, przy czym do niektórych rozwiązań można mieć pewne drobne zastrzeżenia. Pan **Gawryszczak** pisze, że „trudno byłoby zgromadzić taki ładunek na kulce, gdyż odpowiada on potencjałowi $1{,}5 \cdot 10^8$ V i elektrony miałyby energię potencjalną wielokrotnie przewyższającą pracę wyjścia". Uwaga ta wydaje się niesłuszna, gdyż wyjście elektronu z metalu wymaga uzyskania energii na samym początku drogi, podczas gdy potencjał względem nieskończoności jest związany z pracą wykonaną na znacznie większej drodze. Bariera potencjału zapobiegłaby więc ucieczce elektronów z kulki (chyba że pokonywałyby ją na zasadzie przejścia tunelowego). W innych listach Czytelnicy próbowali ściśle całkować siły wzajemnego oddziaływania ładunków na kulce, mimo wyraźnej sugestii „oceń orientacyjnie...". Najbardziej ambitna pod tym względem była praca **J. Łazuki**, który zaprzągł do obliczeń pełny aparat teorii sprężystości wraz z przywołaniem współczynników Poissona i Lamégo (Łyżka dziegciu: dlaczego przyjął, że ładunek jest jednorodnie rozłożony w objętości kulki?). Wreszcie w jednym z przysłanych rozwiązań zwraca uwagę zdumiewający wynik $Q \approx 10^{11}$ C! Skąd może pochodzić błąd aż o 15 rzędów wielkości? Otóż autor rozwiązania (lepiej nie wymieniajmy nazwiska...) rozpatruje tylko oddziaływanie naprzeciwległych par elementarnych ładunków, zapominając o tym, że oddziaływanie wiąże każdy ładunek z każdym innym. Że też mu pióro nie zadrżało...

Zadanie **205.** [Ciało naładowane krąży w polu magnetycznym zmieniającym się bardzo powoli] ($WT = 2{,}98$; $LPR = 1$). Prawidłowe rozwiązanie nadesłał **J. Łazuka**, natomiast dwa inne przysłane rozwiązania zawierały identyczny błąd: Autorzy korzystając z prawa indukcji w postaci $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\Phi/dt$ uwzględnili w pochodnej strumienia po prawej stronie zmianę pola powierzchni objętej torem krążącego ciała. Jest to nieporozumienie, gdyż wirowe pole elektryczne zależy od zmian B, a nie od jakichkolwiek parametrów związanych z ruchem ciała (oczywiście, przy założeniu, że jego własne pole można pominąć).

Zadanie **206.** [Ile wynosi dokładność kąta uderzenia bili niezbędna do zapewnienia jej dwukrotnego zderzenia z inną bilą?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 3$). Przebijając się przez gęsto zapisane wzorami strony w niektórych listach chciałoby się westchnąć – niech uczestnicy mają litość dla prowadzącego Ligę! Niech rozłożą rachunki na etapy, niech czytelnie przedstawią wyniki cząstkowe... Dobre rozwiązanie nadesłał **P. Gadziński**, a niezłe(?) – **A. Gawryszczak** i **J. Łazuka**.

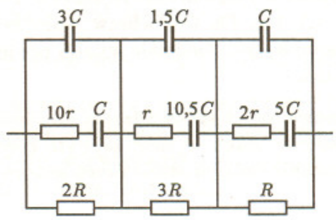
Zadanie **210.** [Wyznaczyć ciepło właściwe substancji wrzuconej do pojemnika zawierającego element grzejny, gdy dany jest przebieg czasowy temperatury] ($WT = 2{,}20$; $LPR = 4$). Być może, niewielkie przesunięcie kolorów na wykresie wydrukowanym w *Delcie* sprawiło, że **A. Gawryszczak**, **P. Gworys** i **A. Idzik** otrzymali liczbową wartość c nieco niższą od podanej w rozwiązaniu „wzorcowym". Ciekawsza jest rozbieżność wyniku **J. Łazuki**, który przyjął, że o wymianie ciepła z otoczeniem decyduje promieniowanie i w związku z tym tempo odpływu ciepła do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy czwartych potęg temperatury absolutnej. Trudno rozstrzygnąć, czy w praktyce to założenie sprawdziłoby się lepiej od najprostszego (w którym przyjmuje się proporcjonalność do różnicy temperatur), ale powinno ono dać wartość c równą około 430 J/(kg·K), tzn. większą od podanej. Ponieważ p. **Łazuka** otrzymał znacznie mniej, więc prawdopodobnie popełnił jakąś pomyłkę rachunkową.

Zadanie **214.** [Zmienne pole magnetyczne przecinające wnętrze obwodów oporowych i nadprzewodzących] ($WT = 3{,}28$; $LPR = 1$). Nawet najbardziej wytrawni uczestnicy Ligi popełniali tu elementarne błędy. W listach występują np. terminy „potencjał" i „różnica potencjałów", które w wirowym polu elektrycznym nie mają żadnego sensu. Niektórzy Czytelnicy koniecznie chcą siłę elektromotoryczną indukcji jakoś „umiejscowić" w obwodzie, albo nawet podzielić na części, co nieuchronnie prowadzi do sprzeczności. Pan **A. Surma** podał trzy odpowiedzi prawidłowe, ale ich uzasadnienie jest bardzo niekompletne.

Zadanie **216.** [Wielkość napisu na powierzchni Ziemi, który można odczytać z satelity] ($WT = 2{,}32$; $LPR = 3$). Jak pisze **A. Idzik**, „zgodnie z zasadami pisma technicznego stosunek szerokości liter do ich wysokości wynosi 4:7", zatem celowe byłoby użycie teleskopu o zwierciadle eliptycznym w celu dopasowania zdolności rozdzielczej w pionie i w poziomie! Ten niezwykle oryginalny pomysł należałoby niezwłocznie opatentować i za ciężkie pieniądze sprzedać CIA...: Pozostałe dwa prawidłowe rozwiązania (niestety, całkiem banalne) nadeszły od **P. Gworysa** i **J. Łazuki**.

Zadanie **218.** [Głośnik pod kloszem pompy próżniowej – jakie powinno być ciśnienie, aby osłabić dźwięk o 20 dB?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 1$). Pan **A. Idzik** wziął tu pod uwagę zależność od ciśnienia współczynników transmisji i odbicia fali na styku między gazem a ścianką. Ale dźwięk odbity pada ponownie na ściankę klosza, więc, jeśli można pominąć absorpcję, efekt ten nie powinien mieć znaczenia.

Zadanie **220.** [Zaprojektować „czarne skrzynki", na których napięcie się zmienia w zadany sposób przy połączeniu szeregowym] ($WT = 2{,}80$; $LPR = 1$). Schemat zaproponowany w *Delcie* 9/1996 nie był jedynym rozwiązaniem i nawet poprzestając tylko na elementach R i C można było przyjąć inny, np. według pomysłu **A. Surmy** (zob. rysunek, gdzie $R \gg r$; pomyłka została poprawiona). Jeszcze więcej możliwości otwierało się po dopuszczeniu elementów L – niestety, próby niektórych Czytelników nie zostały dobrze opracowane.



Zadanie **303.** [Wielościan wypukły, którego każdy płaski przekrój jest p-kątem lub q-kątem (p, q – dane liczby naturalne), jest czworościanem] (współczynnik trudności $WT = 3,43$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 5$). Dobre rozwiązania (**W. Bednorz, P. Gadziński, J. Olszewski, L. Skrzypek, J. Witkowski**) nie są prostsze od firmowego. Nonsensowna pomyłka w sformułowaniu („kąty dwuścienne ostre" – miało być: mniejsze od półpełnego) została na szczęście zignorowana przez rozwiązujących.

Zadanie **305.** [Rzuty punktu P, leżącego na wysokości CD trójkąta ostrokątnego ABC, na boki AC i BC są współliniowe ze środkami kół: opisanego i wpisanego; znaleźć związek między liczbami $h = |CD|$, R, r (promienie tych kół) oraz obliczyć minimalną wartość $|CP| : h$] ($WT = 2,84$; $LPR = 8$ (1?)). **L. Skrzypek** zgłasza – i słusznie! – zastrzeżenia do rozwiązania firmowego (lub do sformułowania treści zadania). Co to znaczy: „znaleźć związek"? Jeśli chodzi o warunki *konieczne i dostateczne* istnienia punktu P o podanych własnościach, to nie wystarczy równość $h = R + r$, wyprowadzona w rozwiązaniu firmowym, ale trzeba jeszcze przeanalizować zakres dopuszczalnych wartości badanych parametrów. Autor zastrzeżenia wykonał tę mozolną pracę i doszedł do następującego stwierdzenia: w trójkącie o danych parametrach R, r, h punkt P o podanych własnościach (i różny od C) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $h = R + r$ oraz $\frac{2}{3}h \le R < \frac{1}{2}\sqrt{2}\,h$. Może należałoby uznać tę pracę za jedyne poprawne rozwiązanie? Ponieważ jednak słowa „znaleźć związek" mogą być interpretowane jako pytanie o samą tylko zależność algebraiczną (równanie), uznaliśmy wielkodusznie, że poprawnych rozwiązań było osiem (przy okazji „załapuje się" też rozwiązanie firmowe).

Zadanie **306.** [$p > 2$ – liczba pierwsza; r_k – reszta z dzielenia k^p przez p^2; $\sum_{k=1}^{p-1} r_k =?$] ($WT = 1,00$; $LPR = 21$). **M. Lewandowski** rozważa analogiczne zagadnienie dla dowolnej liczby nieparzystej $p > 2$ i dowodzi, że jeżeli w zbiorze $\{1, \ldots, p-1\}$ jest s liczb podzielnych przez wszystkie dzielniki pierwsze liczby p, to $\sum r_k = \frac{1}{2}p^2(p-1-s)$.

Zadanie **308.** [$f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; f różniczkowalna; $f' = g \circ f \Rightarrow f$ monotoniczna] ($WT = 3,22$; $LPR = 5$). Tylko **Ś. Gal, J. Olszewski, M. Sawicki, L. Skrzypek** oraz **P. Gadziński**, który zadanie zaproponował. Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego.

Zadanie **316.** [$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y)$; $f =?$] ($WT = 2,08$; $LPR = 7$). Bardzo zgrabnie rozwiązał to równanie **P. Gadziński**: trzy kolejne podstawienia

$$x = u,\ y = v; \qquad x = u,\ y = -v; \qquad x = v,\ y = -v$$

dają trzy równania, które dodane stronami (środkowe ze znakiem minus) pokazują, że

$$(u+v)f(u-v) = (u-v)f(u+v) + 2vf(0);$$

teraz wystaczy podstawić $u = \frac{1}{2}(t+1)$, $v = \frac{1}{2}(t-1)$, aby otrzymać wniosek, że f jest funkcją liniową (oraz sprawdzić, że każda funkcja liniowa jest „dobra").

Zadanie **320.** [Maksymalne i minimalne pole trójkąta przy zadanych promieniach R i r kół: opisanego i wpisanego] ($WT = 3,03$; $LPR = 4$). Pan **J. Ciach** znalazł to zagadnienie w książce: D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volonec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Dordrecht-Boston-London 1989, Ch. I, Sec. 1.1–1.2, Th. O1; wbrew temu, co sugeruje tytuł książki, przytoczone w tym rozdziale wyniki pochodzą jeszcze z ubiegłego stulecia.

Rozwiązanie firmowe, przez sprowadzenie do równania sześciennego i badanie znaku wyróżnika, było zdecydowanie uciążliwe. Rozwiązanie proponowane przez autora zadania (**L. Skrzypek**) – raczej też nie lepsze (mnożniki Lagrange'a). Pozostałe dwa rozwiązania (**P. Gadziński, J. Witkowski**) – zgrabniejsze i „bardziej geometryczne". Zreferujemy w skrócie rozwiązanie **J. Witkowskiego**:

Jeśli okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie K, to

$$\text{pole}(\triangle ABC) = (|AK| + |BC|)r = r^2 \operatorname{ctg}(\alpha/2) + 2Rr\sin\alpha\,;$$

krańcowe dopuszczalne wartości kąta α odpowiadają sytuacjom, gdy trójkąt jest równoramienny (dokładniej, gdy $|AB| = |AC|$); dowód nietrudny. Po wprowadzeniu zmiennej $x = \sin(\alpha/2)$ przebiegającej przedział $\langle x_1; x_2 \rangle$ o krańcach $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2r/R})$, odpowiadających tym dwóm sytuacjom, rutynowe badanie znaku pochodnej otrzymanej funkcji prowadzi do wyniku:

$$S_{\max,\min} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,R^{-1/2}(R - \epsilon d)(R + r + \epsilon d)^{3/2}\,,$$

gdzie

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}\,, \quad \epsilon = +1 \quad \text{dla } S_{\max}\,, \quad \epsilon = -1 \quad \text{dla } S_{\min}\,.$$

Ciekawostka: otrzymane w poszczególnych pracach ekstremalne wartości pola są wyrażeniami „optycznie" całkiem niepodobnymi, a sprawdzenie, że są to w istocie te same liczby, wymaga nieco wysiłku (program DERIVE samodzielnie tego nie potrafił rozpoznać).

Trójkąt o zadanych promieniach R, r i o maksymalnym polu zawsze jest ostrokątny. Trójkąt o minimalnym polu jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $r > d$, czyli gdy $R/r < \sqrt{2} + 1$. Jeśli natomiast $r \le d$, wówczas – jak oblicza **L. Skrzypek** – kres dolny pól trójkątów *ostrokątnych* wynosi $2Rr + r^2$.

Warto w tym miejscu przypomnieć dawniejsze zadanie **231** (*Delta* 12/1991) [w trójkącie ostrokątnym $\left(\sum \cos\alpha_i\right)^2 \le \frac{1}{2}\sqrt{3}\sum \sin\alpha_i$] (trudne! $WT = 3{,}82$; ani jedno z nadesłanych wówczas rozwiązań nie było w pełni zadowalające; dobre rozwiązanie, różne od firmowego, ale też mocno rachunkowe, przysłał dwa lata później, już poza konkursem, **P. Gadziński**). Otóż nierówność z zadania **231** jest równoważna następującej: $(*)\quad S \ge \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r(R+r)^2/R$ (wzór Herona oraz twierdzenie sinusów plus proste tożsamości trygonometryczne). Mając teraz dolne oszacowanie pola S dla trójkątów ostrokątnych pan Skrzypek dostaje bez większego trudu dowód nierówności $(*)$, a co za tym idzie, rozwiązanie zadania **231**, które zresztą – jak sam wyznaje – było dlań inspiracją do zaproponowania zadania **320**. To ostatnie zadanie można więc uważać za wzmocnienie zadania **231**.

Zadanie **321.** [Charakteryzacja par liczb naturalnych (m,n), dla których „(m,n)-koń" jest w stanie osiągnąć każde pole nieskończonej szachownicy $\mathbf{Z}^2$] ($WT = 1,90$; $LPR = 10$). Uogólnienie (**L. Skrzypek**) – układy liczb naturalnych $(n_1, \ldots, n_k)$, dla których analogicznie określony „$(n_1, \ldots, n_k)$-koń" jest w stanie osiągnąć każdą komórkę k-wymiarowej szachownicy $\mathbf{Z}^k$, są scharakteryzowane przez koniunkcję warunków: $\mathrm{NWD}(n_1, \ldots, n_k) = 1$; suma liczb n_i jest nieparzysta, ale co najmniej jedna z tych liczb jest parzysta.

Zadanie **324.** [G – środek ciężkości czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ wpisanego w sferę o środku O i promieniu R; A_iK_i – cięciwa przechodząca przez $G \Rightarrow \sum |GK_i|^{-2} \ge 4/R^2$] ($WT = 2,50$; $LPR = 9$). Ogólniej, dla układu n punktów A_i na sferze w przestrzeni k-wymiarowej zachodzi (przy oznaczeniach jak w zadaniu) równość $\sum |GK_i|^{-2} = n/(R^2 - |OG|^2)$; wystarczy bardzo nieznaczna modyfikacja rozwiązania firmowego. Na to proste uogólnienie zwrócili uwagę **P. Gadziński** i **L. Skrzypek** oraz autor zadania **J. Ciach**.

Zadania z matematyki nr 335, 336

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1997

335. Na bokach AB i AC trójkąta ABC o polu S i obwodzie $2p$ odłożono (odpowiednio) odcinki AK, AL o długościach k, l. Pole trójkąta AKL wynosi S'. Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$.

336. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że każdy jego wyraz jest równy ilorazowi pewnych dwóch wyrazów ciągu Fibonacciego (określonego wzorami: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ dla $n \geq 1$).

Rozwiązania zadań z numeru 10/1996

Przypominamy treść zadań:

327. Rozważamy wielomiany postaci $x^4 + ax^3 + bx + c$, mające cztery pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu ab.

328. Zbiór Z zawarty w płaszczyźnie ma następującą własność: dla każdego punktu $P \in Z$ liczba punktów $Q \in Z$ spełniających warunek $|PQ| = r$ wynosi:

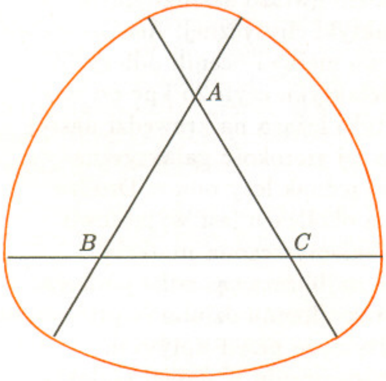
$$2 \text{ gdy } 0 < r < 1; \quad 1 \text{ gdy } r = 1; \quad 0 \text{ gdy } r > 1.$$

Czy zbiór Z musi być okręgiem?

327. Przyjmijmy, że wielomian $F(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste i przypuśćmy, że $a > 0$. Na mocy twierdzenia Rolle'a wielomian pochodny $F'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Badając znak F'' stwierdzamy, że F' jest funkcją rosnącą w przedziałach $(-\infty; -a/2\rangle$ i $\langle 0; \infty)$, a malejącą w przedziale $\langle -a/2; 0\rangle$; wartość $F'(0) = b$ nie może więc być dodatnia. Zatem jeśli $a > 0$, to $b \leq 0$. Analogicznie wykazujemy, że jeśli $a < 0$, to $b \geq 0$. Wniosek: $ab \leq 0$.

Przykład wielomianu $F(x) = x(x-r)(x-2r)(3x+2r) = 3x^4 - 7rx^3 + 4r^3x$ (gdzie r jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą) pokazuje, że wartość iloczynu ab, w tym przypadku równa $-28r^4$, może być dowolną liczbą niedodatnią.

328. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o boku długości 1/2. Kreślimy łuk okręgu o środku A i promieniu 3/4, wyznaczony przez półproste $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$, oraz łuk okręgu o środku A i promieniu 1/4, wyznaczony przez półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CA^{\rightarrow}$. Kreślimy też analogicznie określone łuki okręgów o środkach w punktach B i C (rysunek). Suma tych sześciu łuków jest zbiorem mającym wymaganą własność; proste sprawdzenie (którego szczegóły pominiemy) wymaga rozpatrzenia trzech przypadków: gdy P jest punktem wewnętrznym jednego z trzech większych łuków, jednego z trzech mniejszych łuków, oraz gdy jest jednym z sześciu punktów „klejenia".



Czytelnicy pamiętają czasy, nie tak znów odległe, kiedy to trzeci w danym roku numer *Delty* – a więc nominalnie numer marcowy – pojawiał się w sprzedaży w połowie maja. Uczestnicy ligi mieli na rozwiązywanie zadań czas do końca czerwca (formuła $n+3$); „firmowe" zaś rozwiązania mogli obejrzeć w numerze lipcowym $(n+4)$, który do kiosków trafiał gdzieś we wrześniu.

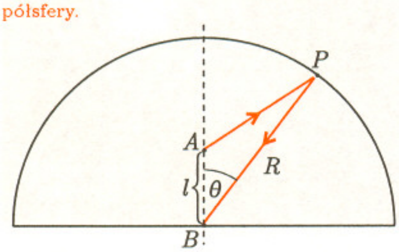
Tempora mutantur, teraz numer wrześniowy kupuje się we wrześniu, a bywa, że i w ostatnich dniach sierpnia; stąd też zmiana terminu przysyłania rozwiązań z $n+3$ na $n+2$ w szóstym punkcie *Regulaminu*. Ale, jak to ze zmianą być musi, od momentu zauważenia jej potrzeby do jej efektywnego pojawienia się w drukowanym *Skrócie regulaminu* minęło parę miesięcy (cykl produkcyjny *Delty*). I oto stała się rzecz zabawna: zamiast własnych rozwiązań można było przez te kilka miesięcy przysyłać odsyłacze do literatury (por. *Regulamin*, p. 11), mianowicie do czasopisma *Delta*, do rozwiązania firmowego w numerze, który pojawiał się w sprzedaży jeszcze przed upływem terminu wysyłki.

Gdyby ktoś tak uczynił, otrzymałby maksymalną ocenę (jeśli tylko rozwiązanie firmowe nie miało błędów); byłoby to zagranie pełne wdzięku. Jak natomiast wyglądało zagranie kompletnie wdzięku pozbawione? Młody uczestnik ligi z dużego miasta wojewódzkiego na północy Polski po prostu przepisał rozwiązania zadań z numeru 12/1995 (przedstawił się jako uczeń trzeciej klasy liceum – czy nie miało być: podstawówki?). Miesiąc później podobnie postąpił z kolejną serią zadań mieszkaniec małej miejscowości z Dolnego Śląska. Dzieci kochane! przecież można było użyć kserokopiarki, wysiłek mniejszy, a pełne punkty i tak lecą.

A swoją drogą, dobrze, że *Delta* ukazuje się terminowo; oby tak było nadal...

W dorocznym omówieniu, jak zwykle, przedstawiamy znalezione przez Czytelników rozwiązania zgrabniejsze od firmowych, a także interesujące komentarze i uogólnienia, oraz odnotowujemy te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne. Raz i drugi bijemy się w pierś z powodu usterek w sformułowaniach.

Rozwiązanie zadania F 446.
Przyjmijmy konwencję dotyczącą znaku l: $l > 0$, gdy punkt A znajduje się wewnątrz półsfery tworzącej zwierciadło, i $l < 0$, gdy punkt A znajduje się na zewnątrz tej półsfery.



Długość drogi optycznej APB jest równa

$$D = AP + BP = \sqrt{l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta} + R.$$

Dla ustalonej wartości l jest to funkcja jednej zmiennej θ. Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}D(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{lR\sin\theta}{\sqrt{l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta}}.$$

Przyrównując tę pochodną do zera otrzymujemy $\theta = 0$. Druga pochodna obliczona w punkcie $\theta = 0$ ma wartość

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2D(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{lR}{R-l}.$$

Wynika stąd, że jest ona dodatnia dla $l > 0$, ujemna dla $l < 0$ i zerowa dla $l = 0$.

Punkty leżące na osi optycznej wewnątrz półsfery odpowiadają minimum drogi optycznej, na zewnątrz półsfery – maksimum drogi optycznej. Punkt $A = B$ odpowiada stacjonarnej drodze optycznej. W tym ostatnim przypadku pochodna $\frac{\mathrm{d}D(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ znika nie tylko dla $\theta = 0$, ale dla wszystkich wartości kąta θ.