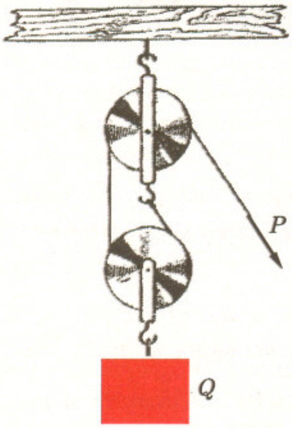
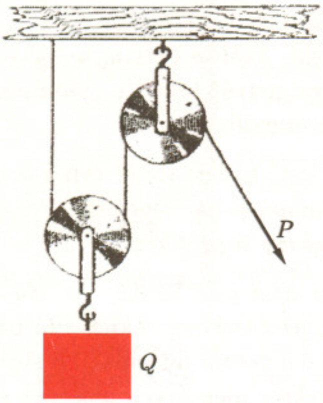
Czy można zrobić na złość?



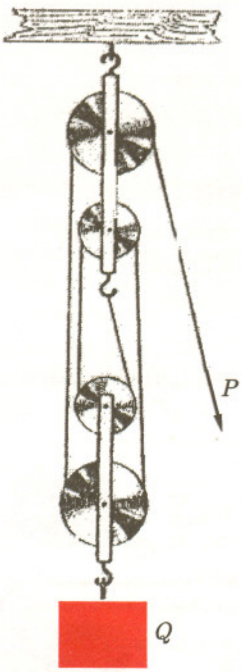
Rys. 1

W starym podręczniku (Prof. dr Adolf Kadesch, *Zarys fizyki, kurs niższy*, spolszczył Jan Babiński, Warszawa 1907, cena kart. 1 rub.) znajduje się definicja wielokrążka zwykłego i stosowne o nim informacje. Cytujemy:

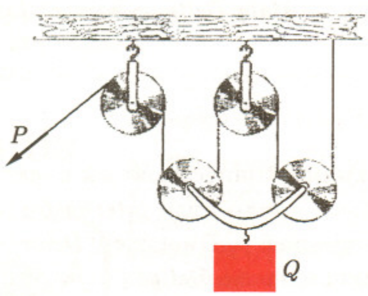
Jeżeli mamy siłę skierowaną w dół, wówczas chcąc by takowa działała na blok ruchomy, uciec się musimy do pośrednictwa bloku stałego. Przytwierdzając sznur bloku ruchomego do nożyc bloku nieruchomego otrzymamy tzw. ***wielokrążek zwykły*** *z jednym blokiem ruchomym i jednym nieruchomym* (rys. 1). *Wielokrążek zwykły składać się również może z kilku bloków stałych i kilku ruchomych. Wszystkie bloki stałe posiadają jedne nożyce wspólne, podobnież wszystkie bloki ruchome. Sznur kieruje się (od nożyc stałych począwszy) na dół, przechodzi najpierw dokoła pierwszego bloku ruchomego, następnie owija u góry pierwszy blok stały, kieruje się następnie ku dołowi, przechodzi dokoła drugiego bloku ruchomego itd.* (rys. 2). *W wielokrążku zwykłym – ciężar (opór) rozkłada się równomiernie na tyle części sznura, ile bloków znajduje się w wielokrążku....*



Rys. 3



Rys. 2



Rys. 4

Zatem uczeń, mając do czynienia z wielokrążkiem zwykłym, mógł niczego w zadaniu o wielokrążku nie obliczać, a jedynie policzyć liczbę widocznych na obrazku kółek. Jest jednak tutaj peszące słowo *zwykły*, które sugeruje, że przed tak bezmyślnym – a skutecznym przecież – postępowaniem powinniśmy zorientować się, czy umieszczony w zadaniu przez nauczyciela wielokrążek jest zwykły, czy też nie. A może to słowo *zwykły* jest dodane tylko tak, dla zwiększenia naukowości, powiedzmy?

Rysunki 3 i 4 nie przedstawiają, dosłownie rzecz biorąc, zwykłych wielokrążków – w każdym bądź razie różnią się od tych z rysunków 1 i 2. Rysunek 3 pochodzi z cytowanego podręcznika, rysunek 4 jest narysowany 90 lat później, ale do obu stosuje się podany wyżej przepis. Czy zatem w ogóle istnieją wielokrążki, gdzie zliczanie kółek nie prowadzi natychmiast do informacji o wielkości siły utrzymującej dany, zawieszony na wielokrążku ciężar w równowadze? Czy można tak złośliwie zaprojektować wielokrążek, by biedny uczeń rozwiązujący zadanie na jego temat musiał się zmusić do myślenia?

Dlaczego nie liczyć prościej?

Każdy wie, że ułamki mnoży się bardzo prosto: licznik przez licznik, mianownik przez mianownik i już. Natomiast dodaje się o wiele bardziej zawile:

$$\frac{a}{b}+\frac{p}{q}=\frac{a\cdot q+p\cdot b}{b\cdot q}.$$

Zastanówmy się, co by było, gdybyśmy dodawali ułamki tak, jak je mnożymy, a więc, gdyby sumą ułamków takich, jak we wzorze wyżej, było

$$\frac{a+p}{b+q}.$$

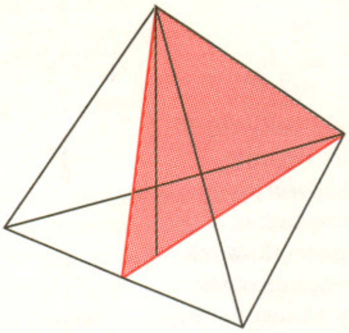
Nazwijmy takie dodawanie **dodawaniem prostym**. Jeżeli ograniczymy się do najprostszych ułamków – czyli takich, których i licznik, i mianownik jest liczbą naturalną, to okaże się, że wynik zwyczajnego dodawania jest zawsze większy od wyniku dodawania prostego:

$$\frac{a+p}{b+q}<\frac{a\cdot q+p\cdot b}{b\cdot q}.$$

Spróbuj, Czytelniku, uzasadnić, że faktycznie tak jest. Jeżeli nie pogardzisz wskazówką, to jest ona taka, jak to się w matematyce często zdarza – zamiast dowodzić tego, co Ci proponują, spróbuj udowodnić coś mocniejszego: wynik dodawania prostego zawsze mieści się między dodawanymi ułamkami, czyli

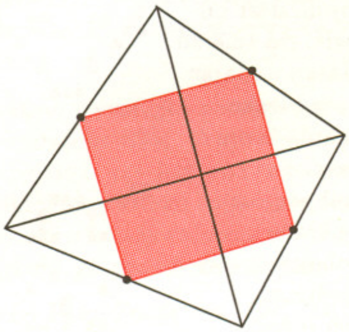
[*] $\quad$ gdy $\frac{a}{b}\le\frac{p}{q}$, to $\frac{a}{b}\le\frac{a+p}{b+q}\le\frac{p}{q}$.

Okazuje się, że sposobów jest nieskończenie wiele



Rys. 1

Co bardziej sprytni i obdarzeni wyobraźnią przestrzenną Czytelnicy bez trudu odpowiedzą twierdząco na pytanie *czy można czworościan foremny przeciąć tak, by obie powstałe w ten sposób części były jednakowe?*, jak również przecząco na pytanie *czy jest tylko jedna taka możliwość?* Istotnie, można czworościan rozciąć płaszczyzną przechodzącą przez jedną z krawędzi i przez mającą z nią wspólny koniec wysokość czworościanu – otrzyma się wtedy dwa przystające czworościany (rys. 1). Niezależnie od tego, czy zaliczymy to rozwiązanie jako jedno, czy jako sześć (bo tyle jest krawędzi), to istnieje jeszcze inny sposób – przeciąć przez środki czterech, parami skośnych krawędzi. Otrzymuje się wtedy dwie bryły nie mające (chyba) standardowej szkolnej nazwy, a mające dwie ściany trójkątne, dwie trapezowe i jedną kwadratową (rys. 2).



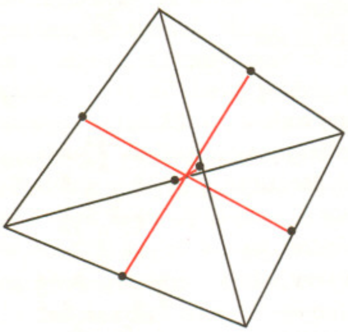
Rys. 2. Przecięć kwadratowych jest 3.

A czy istnieją jeszcze inne rozwiązania tego zadania? Istnieją, i każdy, kto miałby trudności z ich znalezieniem, powinien po przeczytaniu następnego zdania spłonąć rumieńcem.

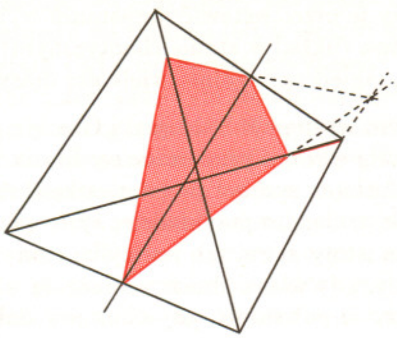
Każda płaszczyzna przechodząca przez środek bądź oś symetrii wielościanu dzieli go na dwie przystające części.

Właściwie nie ma tu nawet nad czym myśleć – owa symetria nakłada jedną z części na drugą.

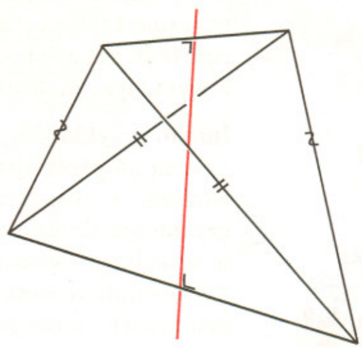
Czworościan foremny nie ma środka symetrii, ma natomiast trzy osie symetrii: proste łączące środki skośnych krawędzi (prawda?). Każda płaszczyzna przechodząca przez taką oś dzieli ten czworościan na jednakowe części (rys. 3). Nasze zadanie ma zatem nieskończenie wiele istotnie różnych rozwiązań.



Rys. 3. Osie symetrii czworościanu foremnego.



Rys. 4. Każde płaskie przecięcie połowiące czworościan foremny zawiera przynajmniej jedną jego oś symetrii, gdy nie jest trójkątem, jest deltoidem.



Rys. 5. Oś symetrii mają nie tylko foremne czworościany. Ma ją każdy czworościan, w którym prosta łącząca środki jednej z par krawędzi skośnych jest do nich obu prostopadła.

To powinno się lepiej poddać dowodzeniu. Nasuwa się jednak, rzecz jasna, pytanie:
jeśli między, to gdzie, w którym punkcie odcinka osi liczbowej mającego końce w punktach odpowiadających dodawanym ułamkom?
I tu odpowiedź jest naprawdę zaskakująca: otóż miejsca tego nie da się ustalić. Zależy ono od postaci ułamka. Rozszerzając jeden z ułamków (a drugi pozostawiając bez zmian) przesuwamy wynik w jego stronę. Uzasadnienie znów pozostawiamy Czytelnikom, tu tylko kilka liczbowych przykładów:

$$\frac{1}{2} < \frac{4+2}{8+3} < \frac{2+2}{4+3} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{1+4}{2+6} < \frac{1+6}{2+9} < \frac{2}{3}.$$

Taka sytuacja, gdy wynik działania zależy od postaci ułamków, na których je wykonujemy, jest zupełnie nie do przyjęcia. Dlatego też pozostaniemy, niestety, przy tradycyjnym, niewygodnym sposobie dodawania ułamków.

Aby jednak na koniec było coś pozytywnego, zauważmy, że
dodawanie proste jednakowych ułamków daje jako wynik ten sam ułamek
(to wynika bezpośrednio z nierówności [*]). Jeżeli słowo *ułamek* zastąpić tyle samo znaczącym słowem *proporcja*, to nasze spostrzeżenie może przynieść wiele korzyści. Np. w geometrii, gdzie proporcji jest bez liku.