

Protokół posiedzenia Jury

Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Stanisław Fudali, Paweł Strzelecki, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski,

biorąc pod uwagę zawartość prac i sposób ich prezentacji postanowiło:

- 1) przyznać złoty medal i nagrodę w kwocie 300 złotych Michałowi Stukowowi z I LO im. M. Kopernika w Gdańsku za pracę *Krótką historią dowodu pewnego twierdzenia*,
- 2) przyznać srebrny medal i nagrodę w kwocie 250 złotych Adamowi Osękowskiemu z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę *Zastosowanie liczb zespolonych w zadaniach geometrycznych*,
- 3) przyznać brązowe medale i łączną nagrodę w kwocie 150 złotych Tomaszowi Kowalskiemu i Arturowi Wirowskiemu z I LO im. M. Kopernika w Łodzi za pracę *Cechy podzielności liczb*,
- 4) przyznać wyróżnienie i kwotę 100 złotych Adamowi Dzedziejowi z I LO im. M. Kopernika w Gdańsku za pracę *O obliczaniu granic pewnego rodzaju ciągów*,
- 5) przyznać cztery nagrody po 100 zł opiekunom uczestników finału:
 - Aleksandrze Grabowskiej, opiekunce złotego medalisty,
 - Grzegorzowi Rządowskiemu i Tomaszowi Żukowskiemu, opiekunom srebrnego medalisty,
 - Oldze Stande, opiekunce brązowych medalistów,
 - Andrzejowi Daszke, opiekunowi wyróżnionego uczestnika.

(-) podpisy członków Jury

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.



Rozwiązanie zadania F 444. Kropla wody może się oderwać od sufitu, gdy jej ciężar stanie się większy od sił napięcia powierzchniowego. Maksymalny promień kropli przyzwiązanej do sufitu określa równanie

$$2\pi R\sigma = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g.$$

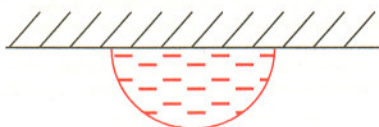
Otrzymujemy stąd

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho g}} \approx 4,7 \text{ mm}.$$

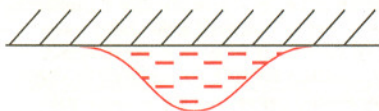
Promień kropli, która oderwała się od sufitu, jest $\sqrt[3]{2}$ razy mniejszy od R i wynosi

$$r \approx 3,7 \text{ mm}.$$

Wynik ten jest zawyżony. Rozmowienie, które do niego prowadzi, zawiera dwa istotne uproszczenia. Po pierwsze, przyjęliśmy, że kropla przyzwiązana do sufitu ma kształt półkuli (rys. 1), podczas gdy w rzeczywistości ma kształt pokazany na rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

Po drugie, przyjęliśmy dla napięcia powierzchniowego wartość charakteryzującą powierzchnię rozdziału woda–powietrze, zaniedbując wpływ podłoża (sufitu).



Rozwiązanie zadania F 443. Posługując się zmiennymi biegunowymi energię cząstki możemy zapisać jako

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r^4},$$

gdzie $L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$ jest momentem pędu cząstki (stała ruchu). Wykorzystując stałość momentu pędu wyeliminujemy czas z wyrażenia określającego energię,

$$E = \frac{L^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\lambda}{r^4}.$$

Dla zerowej energii powyższe równanie sprrowadza się do postaci

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = a^2 - r^2,$$

gdzie $a^2 = 2m\lambda/L^2$. Całkując je otrzymujemy $r = a \cos \phi$. Jest to równanie okręgu o promieniu

$\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{m\lambda}{2L^2}}$ przechodzącego przez centrum przyciągania!

Powyższy problem ma rozwiązanie, które opisują funkcje elementarne, także dla $E = \frac{L^4}{16m^2\lambda}$. W tym przypadku tor cząstki jest spiralą asymptotycznie zbliżającą się do okręgu o promieniu $\sqrt{\frac{4m\lambda}{L^2}}$ (proponujemy potraktowanie tego jako ćwiczenie). Dla wszystkich innych wartości energii zależności $r(\phi)$ opisują funkcje eliptyczne.