Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1997

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 319 (WT=1,20), 320 (WT=3,03), 321 (WT=1,90) i 322 (WT=1,60) z numerów 4 i 5/1996

Krzysztof Zapisek	– Warszawa	39,12
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	38,45
Piotr Żmijewski	– Łódź	37,71

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 219 (WT=3,30) i 220 (WT=2,80) z numeru 5/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	43,06
Aleksander Surma	– Myszków	41,92
Przemysław Gworys	– Częstochowa	35,06
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	29,85
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	21,59

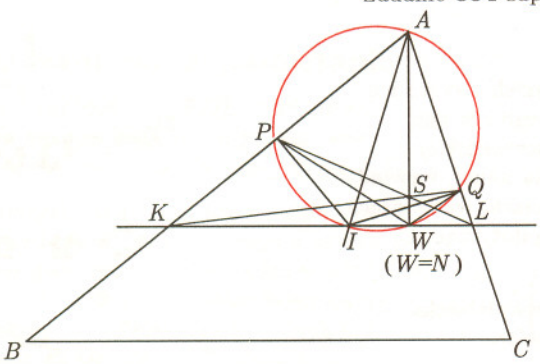
Zadania z matematyki nr 333, 334

Redaguje Marcin E. KUCZMA

333. Zbiorem „klubowym" będziemy nazywali 44-elementowy zbiór K liczb całkowitych mający następującą własność: suma liczb w każdym niepustym podzbiorze zbioru K jest niepodzielna przez 45. Ile jest zbiorów klubowych zawartych w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 1997\}$?

334. Dla każdej liczby naturalnej n szereg $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ jest zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez S_n. Dowieść, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Zadanie **334** zaproponował pan Marcin Kasperski z Warszawy.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1996

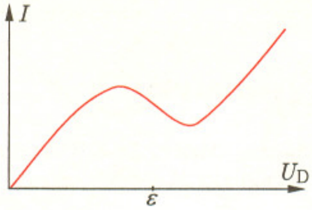
Przypominamy treść zadań:

325. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Prosta przechodząca przez jego środek i równoległa do boku BC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Odcinki KQ i LP przecinają się w punkcie S. Odcinek SN jest wysokością w trójkącie KLS. Dowieść, że $\angle PNS = \angle QNS$.

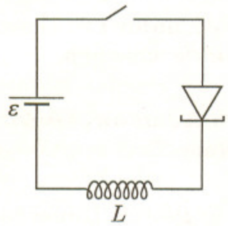
326. Udowodnić, że dla liczb $\alpha, \beta \in (-\pi/2; \pi/2)$ zachodzi nierówność
$$\ln\frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\beta}\cdot\ln\frac{1+\sin\beta}{1+\sin\alpha} \geq (\beta-\alpha)^2.$$

325. W trójkącie AKL prowadzimy wysokość AW oraz dwusieczną AI kąta A; punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Zachodzą proporcje:
$$\frac{|KP|}{|KW|} = \frac{|IK|}{|AK|} = \frac{|IL|}{|AL|} = \frac{|LQ|}{|LW|};$$
dwie skrajne równości wynikają z podobieństw trójkątów prostokątnych $\Delta IKP \sim \Delta AKW$ oraz $\Delta ILQ \sim \Delta ALW$, a środkowa równość jest treścią twierdzenia o podziale boku trójkąta przez dwusieczną. Zatem
$$1 = \frac{|KW|\cdot|LQ|}{|KP|\cdot|LW|} = \frac{|KW|}{|WL|}\cdot\frac{|LQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AP|}{|PK|}$$
(bowiem $|AP| = |AQ|$) i na podstawie twierdzenia Cevy wnosimy, że punkt przecięcia odcinków KQ i LP, czyli punkt S, leży także na odcinku AW. Stąd wniosek, że punkt W pokrywa się z N. Punkt ten, jak również punkty P i Q, leżą na okręgu, którego średnicą jest odcinek AI. Wpisane w ów okrąg kąty PNA i QNA, oparte na przystających łukach AP i AQ, są równe. Skoro zaś S leży na odcinku AN, otrzymaliśmy równość, którą trzeba było wykazać.

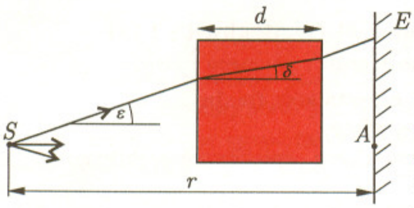
326. Można założyć, że $\alpha < \beta$ (obie strony danej do udowodnienia nierówności zachowują swą wartość przy zamianie α i β miejscami). Dla każdej pary funkcji ciągłych na dowolnym przedziale $\langle a; b\rangle$ zachodzi *nierówność Cauchy'ego–Schwarza*
$$\text{(CS)}\qquad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$
Przyjmijmy: $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ (zatem $-1 < a < b < 1$) oraz $f(x) = 1/\sqrt{1-x}$, $g(x) = 1/\sqrt{1+x}$. Wówczas
$$\text{Lewa strona (CS)} = \left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = (\arcsin b - \arcsin a)^2 = (\beta-\alpha)^2,$$
$$\text{Prawa strona (CS)} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x}\cdot\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln\frac{1-a}{1-b}\cdot\ln\frac{1+b}{1+a};$$
stąd teza.



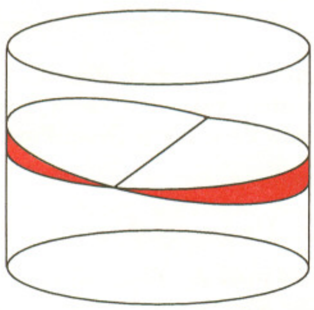
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 231, 232

Redaguje Jerzy B. BROJAN

231. Jacek siedzi na lekkiej huśtawce w odległości 2 m od punktu podparcia, a Marek zeskakuje z pewnej wysokości na drugie ramię huśtawki. W jakiej odległości od punktu podparcia powinien zeskoczyć, aby Jacek wzbił się jak najwyżej? Marek waży trzy razy więcej od Jacka, a huśtawka jest doskonale sprężysta.

232. Na rysunku 1 przedstawiona jest charakterystyka diody tunelowej w kierunku przewodzenia. Diodę tę włączono w obwód zawierający źródło napięcia $\mathcal{E}$ i cewkę o indukcyjności L (rys. 2), przy czym wartość napięcia $\mathcal{E}$ leży w opadającym obszarze charakterystyki (została zaznaczona na rys. 1). Opisać jakościowo procesy zachodzące w obwodzie po zamknięciu klucza.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1996

Przypominamy treść zadań:

223. Na powierzchni wody pływa:
a) prostopadłościan o krawędziach a, b i h, przy czym krawędź h jest pionowa.
b) walec o promieniu r i wysokości (pionowej) h,
c) stożek o kącie rozwarcia 2α i wysokości h, podstawą do góry.
Jeśli wszystkie bryły są jednorodne, to jakie warunki muszą spełniać gęstość ϱ oraz wymienione parametry, aby w tej pozycji równowaga była stabilna, tzn. aby po małym wychyleniu bryła powracała do pozycji początkowej?

224. Punktowe źródło światła S oświetla ekran E (rys. 3). Czy wstawienie między źródło a ekran płaskorównoległej płytki szklanej spowoduje wzrost natężenia oświetlenia środkowej części ekranu (okolicy punktu A), czy spadek, czy też natężenie oświetlenia nie zmieni się? Jeśli wystąpi zmiana, to czy będzie ona silniejsza, gdy płytkę o ustalonej grubości wsuniemy bliżej źródła, czy bliżej ekranu? Zakładamy, że płytka jest pokryta warstwą przeciwodblaskową eliminującą odbicie, a szkło jest doskonale przezroczyste.

223. We wszystkich trzech przypadkach środek masy bryły znajduje się ponad środkiem masy części zanurzonej – oznaczmy te punkty przez S i S_z, a różnicę wysokości przez d. Gdyby więc część zanurzona nie zmieniała kształtu, to przy przechyle o mały kąt ε punkt S_z przesunąłby się w poziomie względem S o odcinek εd, przy czym moment powstałej pary sił miałby zwrot pogłębiający przechył. Stabilność pozycji pionowej może wystąpić tylko wtedy, gdy wskutek zanurzenia się pewnej części bryły po jednej stronie (oznaczmy tę część przez Ω) i wynurzenia po drugiej środek masy części zanurzonej przesunie się w poziomie o odcinek Δx dłuższy od εd. W obliczeniach będziemy uwzględniać tylko wyrazy pierwszego rzędu względem ε. W tym przybliżeniu przechył można uznać za obrót wokół osi „leżącej na powierzchni wody" i przecinającej prostą S_zS, a obie części Ω (zanurzoną i wynurzoną) – za „cienkie" i identyczne. Wielkość Δx wyznaczamy ze wzoru

$$\Delta x = \frac{2\int x\mathrm{d}V}{V_z} = \frac{2x_{ś.m.}\Delta V}{V_z},$$

gdzie V_z jest objętością części zanurzonej (wprowadźmy też oznaczenie głębokości zanurzenia h_z), ΔV – objętością jednej z części Ω, a $x_{ś.m.}$ – odległością środka masy Ω od osi przechyłu. Dalsze obliczenia przeprowadzimy oddzielnie dla każdego przypadku.

a) Znajdujemy $V_z = abh_z$, $h_z = \varrho h$ (symbolem ϱ będziemy oznaczać stosunek gęstości bryły do gęstości wody), $d = (h - h_z)/2 = (1-\varrho)h/2$. Jeśli prostopadłościan przechyla się obracając wokół osi równoległej do krawędzi a, to Ω jest klinem (w przybliżeniu wycinkiem walca) o wysokości $b/2$ i objętości $\Delta V = (1/2)a(b/2)^2\varepsilon$, a środek masy Ω leży – tak jak w przypadku trójkąta – w odległości 2/3 wysokości od krawędzi klina. Zatem $x_{ś.m.} = b/3$ i obliczamy $\Delta x = (1/12)b^2\varepsilon/(\varrho h)$, a warunek $\Delta x > \varepsilon d$ sprowadza się do

$$b > h\sqrt{6\varrho(1-\varrho)}.$$

Oczywiście, ten sam warunek musi spełniać także parametr a.

b) Wzory na h_z i d są takie, jak w przypadku a), natomiast $V_z = \pi r^2 h_z$. Na rysunku 4 widzimy, że Ω jest tym razem w przybliżeniu klinowym wycinkiem kuli, a objętość ΔV jest proporcjonalną do ε częścią objętości kuli: $\Delta V = (2/3)\varepsilon r^3$. Aby znaleźć położenie środka masy takiego wycinka, trzeba wyliczyć odpowiednią całkę – otrzymujemy $x_{ś.m.} = (3\pi/16)r$, a dalej $\Delta x = (1/12)r^2\varepsilon/(\varrho h)$. Warunek równowagi ma postać podobną do poprzedniej:

$$r > h\sqrt{6\varrho(1-\varrho)}.$$

c) Teraz $h_z = h\varrho^{1/3}$, a ponieważ środek masy stożka jest w odległości $(3/4)h$ od wierzchołka, więc $d = (3/4)h(1-\varrho^{1/3})$. Wartości ΔV i $x_{ś.m.}$ wylicza się tak, jak w punkcie b), z tym że promień r należy zastąpić przez $r_z = h_z \operatorname{tg}\alpha$. Stąd $\Delta x = (3/4)\varepsilon h_z \operatorname{tg}^2\alpha$, a po przekształceniach znajdujemy warunek równowagi

$$\operatorname{tg}^2\alpha > \varrho^{-1/3} - 1.$$

224. Niech odległość źródła od ekranu wynosi r, a grubość płytki – d. Rozważmy wiązkę światła wybiegającą ze źródła pod kątem względem osi nie przekraczającym małej wielkości ε (wewnątrz stożka o kącie rozwarcia 2ε). W nieobecności płytki wiązka ta oświetli na ekranie koło o promieniu εr. Po wsunięciu płytki promienie ulegną załamaniu i przesunięciu równoległemu; wewnątrz płytki skrajne promienie wiązki będą biegły pod kątem $\delta < \varepsilon$ do osi (w przybliżeniu małych kątów $\delta = \varepsilon/n$, gdzie n – współczynnik załamania szkła). Widzimy, że promień koła oświetlonego przez wiązkę zmaleje do wartości $\varepsilon(r-d) + \delta d$, czyli natężenie oświetlenia odpowiednio wzrośnie. Efekt ten nie zależy od położenia płytki.

Rozwiązanie zadania M 795.
Dla $1 \geq x \geq y \geq 0$ mamy $f(x) = f((x-y)+y) \geq f(x-y) + f(y) \geq f(y)$, co dowodzi, że funkcja f jest niemalejąca. Skoro $f(0) = f(0+0) \geq f(0) + f(0)$, to $0 \geq f(0) \geq 0$, czyli $f(0) = 0$. Teza jest prawdziwa dla $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, bo wtedy $f(x) \leq f(1) = 1 \leq 2x$. Także dla $x \in (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, mamy

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(x)) \leq \frac{1}{2}f(2x) \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}f(4x) \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n}f(2^n x) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^n}f(1) = \frac{1}{2^n} \leq 2x,$$

natomiast dla $x = 0$ teza zadania jest oczywista.

Rozwiązanie zadania M 796. Nie. Za kontrprzykład może służyć funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$