



Rozwiązanie zadania M 797. Przez prostą indukcję wykazujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej k i dowolnej liczby rzeczywistej x mamy

$$P(x^{n^k}) = P\left(\left(x^{n^{k-1}}\right)^n\right) = P\left(x^{n^{k-1}}\right)^n = \dots = P(x)^{n^k}.$$

Rozważmy dwa przypadki. Jeśli wielomian P jest stały, $P(x) \equiv c$, to $c = c^n$, czyli $c = 0$, $c = 1$, lub, o ile n jest liczbą nieparzystą, $c = -1$. Jeśli natomiast P nie jest wielomianem stałym, to $\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = \infty$, a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |P(x)|}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_x |P(x)| = \deg P.$$

Niech więc $y > 1$ będzie taką liczbą, że $|P(y)| > 1$; wówczas ciąg $x_k = y^{n^k}$ jest rozbieżny do nieskończoności i na mocy dowiedzonego na początku wzoru jest

$$|P(x_k)| = |P(y^{n^k})| = |P(y)|^{n^k} = \left(y^{\log_y |P(y)|}\right)^{n^k} = \left(y^{n^k}\right)^{\log_y |P(y)|} = (x_k)^{\log_y |P(y)|},$$

a zatem $\deg P = \lim_{k \rightarrow \infty} \log_{x_k} |P(x_k)| = \log_y |P(y)|$. Stąd

$$|P(y)| = y^{\deg P}$$

dla dostatecznie dużych liczb y . Ponieważ wielomian jest funkcją ciągłą, więc $P(y) = y^{\deg P}$ dla dostatecznie dużych y lub $P(y) = -y^{\deg P}$ dla dostatecznie dużych y . Wiadomo, że wielomiany zmiennej rzeczywistej zgodne w nieskończenie wielu punktach są równe (bo ich różnica ma nieskończenie wiele zer, więc jest wielomianem zerowym). Przeto $P(y) \equiv y^{\deg P}$ lub $P(y) \equiv -y^{\deg P}$. Jak poprzednio, łatwo sprawdzić, że ten drugi przypadek zachodzić może tylko dla n nieparzystych. Ostateczna odpowiedź brzmi więc: warunki zadania spełniają wielomiany stałe 0 i 1, wszystkie wielomiany postaci x^m , a jeśli n jest liczbą nieparzystą, to także wielomian stały -1 i wszystkie wielomiany postaci $-x^m$.

Czytelnikom proponujemy zastanowienie się nad tym, jakie pary wielomianów mają tę własność, że $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Foton

Chcemy polecić Waszej uwadze *Foton* – ciekawy miesięcznik dla nauczycieli fizyki i ich uczniów, sponsorowany przez Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego i w nim wydawany. Spełnia on też funkcję biuletynu informacyjnego Sekcji Nauczycielskiej Polskiego Towarzystwa Fizycznego. Znajdziecie w nim nowości ze świata nauki, wywiady, kącik eksperymentatora, zadania z komputerem, informacje o konferencjach, warsztatach, pokazach, konkursach itp. W *Fotonie* ukazują się artykuły dydaktyczne dotyczące nauczania fizyki i – ogólnie biorąc – edukacji (np. reforma nauczania).

Oprócz normalnych zeszytów (do tej pory 45), zaczęła się ukazywać seria niebieska – fizyka z komputerem oraz seria żółta – dla nauczycieli fizyki i studentów.

Zeszyt 44 zawiera, między innymi, artykuły: „Po co badamy strukturę materii i cząstki elementarne?” – Jacka Turnaua; „W poszukiwaniu granic struktury materii, czyli co to znaczy, że coś się z czegoś składa?” – Krzysztofa Fiałkowskiego; „Dlaczego noce są ciemne i jaki ma to związek z początkiem Wszechświata?” – Edwarda Malca; wywiady z G. Bednorzem, laureatem Nagrody Nobla, i M. Turałą (CERN).

Numer 46 – „doświadczalny” będzie zawierać: artykuł „Zagadka neutrin słonecznych” (M. Wójcik); rozmowy i wywiady z fizykami na temat ważnych doświadczeń w fizyce (K. Fiałkowski, T. Dohnalik, A. Szytuła); doświadczenia, pokazy, zagadki i ciekawostki (B. Warczak).

Polecamy zeszyty dydaktyczne: 43 – Wkład psychologii w nauczaniu fizyki; 45 – O przeszkodach poznawczych w nauczaniu fizyki; 47 – O rozwiązywaniu zadań z fizyki; oraz zeszyt niebieski *Fizyka z komputerem*, a w nim: „Fraktalna nieznośność bytu, czyli historia demonów Mandelbrota” (E. Gudowska-Nowak); „Fizyka statystyczna – to nie takie trudne” (P. Pawłowski); „Rysujemy fraktale”, „Komputerowe bilardy”, „Cykloida” (A. Dyrek).

Foton można zamówić listownie: Instytut Fizyki, 30-059 Kraków, ul. Reymonta 4 (12 zł za sześć numerów).

a dalej było już spokojnie, choć może nudno – kolejne momenty przynosiły na zmianę sytuacje
51, 52, 51, 52, 51, 52...
i na takim monotonnym kiwaniu ogonkiem powoli mijala wieczność.