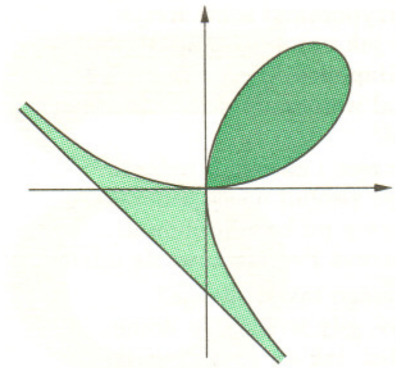
Owale, liście, spirale

By oszczędzić zainteresowanym Czytelnikom kłopotu z wertowaniem indeksów, spisów treści i zakurzonych kartek opasłych podręczników dwuwymiarowej geometrii analitycznej i różniczkowej, opowiemy krótko o tych krzywych płaskich, których nazwy pochodzą od nazwiska Kartezjusza.



Rys. 1. Liść Kartezjusza $x^3 + y^3 = 3axy$ i jego asymptota $x + y + a = 0$; pola obu zakreskowanych obszarów są równe.

Liść Kartezjusza jest *cissoidą elipsy*, tzn. dla odpowiednio położonych elipsy i prostej o równaniach parametrycznych $\mathbf{r}_1(\theta) = (x_1(\theta), y_1(\theta))$ i $\mathbf{r}_2(\theta) = (x_2(\theta), y_2(\theta))$, w których θ jest kątem biegunowym, krzywa o równaniu $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}_2(\theta) - \mathbf{r}_1(\theta)$ to właśnie liść Kartezjusza.

Zacznijmy od *liścia Kartezjusza*. Tą nazwą określa się zwykle krzywą o równaniu

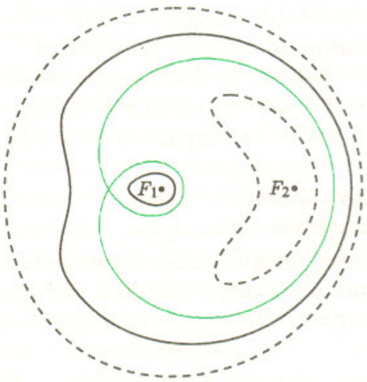
$$x^3 + y^3 = 3axy\,,$$

gdzie a jest ustalonym parametrem. Mój sześcioletni syn twierdzi, że liść Kartezjusza bardziej przypomina rybkę niż liść. O takie skojarzenie nietrudno, gdy na rysunku razem z liściem widać jego asymptotę. Równanie tej ostatniej najprościej znaleźć, kładąc w równaniu liścia $y = tx$ i przechodząc do równań parametrycznych,

$$x = \frac{at}{1+t^3}, \quad y = \frac{at^2}{1+t^3}, \qquad t \neq -1\,.$$

Widać z nich wyraźnie, że $x \to \pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \to \mp\infty$, a w dodatku jest tak dla wartości $t = \frac{y}{x}$ dążących do -1. Stąd już tylko prosty rachunek dzieli nas od stwierdzenia, że asymptota liścia ma równanie $x + y + a = 0$. Wykorzystując parametryczne równania liścia Kartezjusza można także udowodnić (polecamy to ćwiczenie wielbicielom całkowania funkcji wymiernych), że pole obszaru ograniczonego pętelką liścia w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych jest równe polu nieograniczonego paska leżącego między dwoma ogonkami liścia i jego asymptotą.

Kartezjusz, który studiował rozmaite własności liścia w 1638 roku, błędnie sądził, że widoczna w pierwszej ćwiartce układu pętelka liścia powtarza się w innych ćwiartkach. Jego pogląd podzielał Roberval, który nawet używał nazwy *fleur de jasmin* (kwiatek jaśminu). Dość trafna, używana niekiedy po francusku, nazwa liścia Kartezjusza to *noeud de ruban* (dosł. *kokarda ze wstążki*).

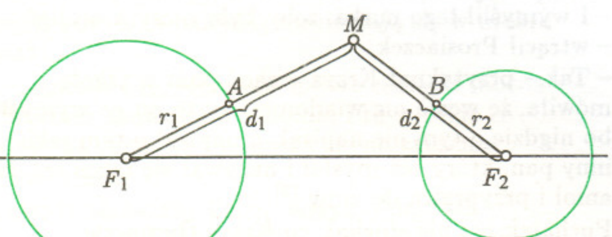


Rys. 2. Rodzina owali Kartezjusza dla różnych wartości parametrów a i m z wyróżnionym ślimakiem Pascala.

Dużo ciekawsze od liścia są tzw. *owale Kartezjusza*. Tak nazywa się zbiór tych punktów płaszczyzny M, których odległości $d_1 = MF_1$ i $d_2 = MF_2$ od dwóch zadanych punktów F_1 i F_2 spełniają zależność

$$d_1 + md_2 = a \tag{1}$$

(m i a są tu ustalonymi parametrami rzeczywistymi). W ogólnym przypadku zbiór takich punktów M składa się z dwóch owalnych krzywych (rys. 2).

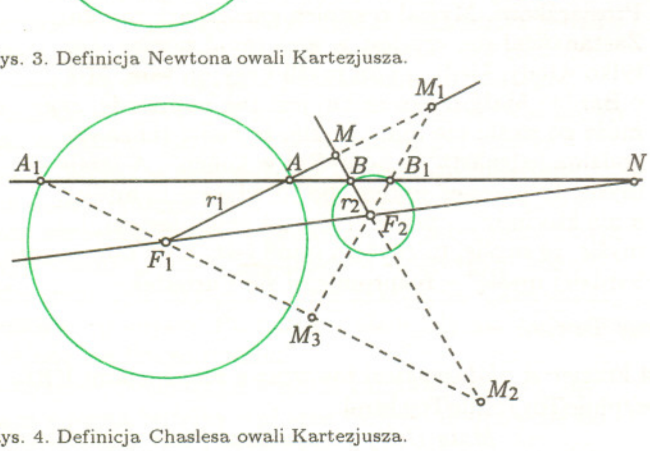


Rys. 3. Definicja Newtona owali Kartezjusza.

Każdy widzi, że dla $m = \pm 1$ i $a > F_1F_2 > 0$ otrzymujemy jako przypadki szczególne elipsę oraz hiperbolę. Każdy też może sprawdzić, że we współrzędnych kartezjańskich owale Kartezjusza opisane są równaniem

$$\left((1-m^2)\left(x^2+y^2\right) + 2dm^2x + a^2 - d^2m^2\right)^2 = \\ = 4a^2\left(x^2+y^2\right), \tag{2}$$

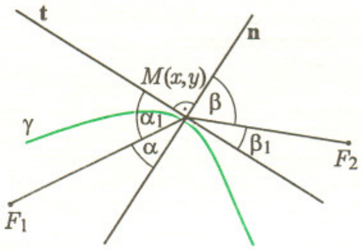
gdzie d jest odległością punktów F_1 i F_2. W kolejnym przypadku szczególnym, gdy $m = a/d > 1$, wewnętrzny owal dotyka zewnętrznego, a równanie (2) opisuje tzw. ślimak Pascala albo inaczej konchoidę okręgu, krzywą, którą można wykorzystać do przeprowadzenia trysekcji kąta (*Mała Delta* 11/1996).



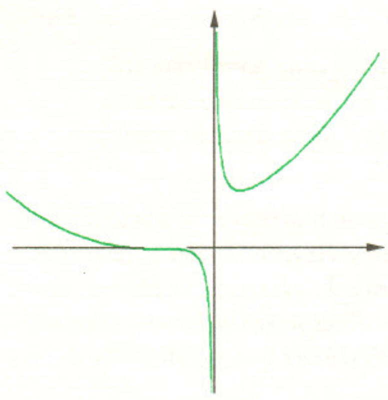
Rys. 4. Definicja Chaslesa owali Kartezjusza.

Równoważne określenie owali Kartezjusza podał Newton. Mianowicie, owale Kartezjusza są zbiorem tych punktów płaszczyzny M, dla których stosunek odległości od dwóch danych okręgów jest stały (rys. 3). Istotnie, jeśli $\frac{MA}{MB} = \text{const} = c$, to wtedy $\frac{d_1 - r_1}{d_2 - r_2} = c$, czyli równoważnie $d_1 + (-c)d_2 = r_1 - cr_2$. Jeszcze inną definicję owali Kartezjusza podał Chasles (czyt. Szal). Weźmy dwa okręgi o środkach i promieniach odpowiednio F_1, F_2 oraz r_1, r_2 oraz dowolny punkt N na prostej F_1F_2 (rys. 4).

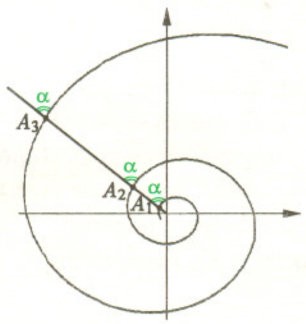
Samodzielny dowód faktu, że definicja Chaslesa określa istotnie owale Kartezjusza, polecamy jako ciekawe zadanie miłośnikom kącika olimpijskiego znającym twierdzenie Menelaosa.



Rys. 5. Proste **t** i **n** to odpowiednio styczna i normalna do krzywej γ w punkcie $M(x,y) \in \gamma$, α to kąt padania promienia F_1M, a β – kąt załamania.



Rys. 6. Trójząb Newtona, czyli parabola Kartezjusza.



Rys. 7. Spirala równokątna (lub inaczej logarytmiczna) $r(\theta) = \alpha\exp(\theta \operatorname{ctg}\alpha)$; α jest parametrem, a r i θ to współrzędne biegunowe. Mamy $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA_2}{OA_3} = \ldots = \text{const}$, a półprosta o początku w punkcie O przecina spiralę (zawsze) pod kątem α.

Z punktu N prowadzimy sieczną, która przecina dane okręgi w punktach A_1, A, B, B_1. Łącząc punkty A_1 i A z F_1 oraz B i B_1 z F_2 otrzymujemy cztery proste przecinające się w punktach M, M_1, M_2, M_3. Gdy będziemy zmieniać położenie siecznej poprowadzonej z punktu N, to punkty M, M_1, M_2 i M_3 poruszać się będą właśnie po jednym z owali Kartezjusza.

Sam Kartezjusz natrafił na owale poszukując tzw. krzywych aplanatycznych. Są to krzywe γ oddzielające dwa ośrodki optyczne i mające tę własność, że promienie świetlne wychodzące z ustalonego punktu F_1 w jednym ośrodku, po załamaniu na granicy ośrodków, na krzywej γ, skupiają się w ustalonym punkcie F_2 w drugim ośrodku. Okazuje się, że owale Kartezjusza są krzywymi aplanatycznymi.

Aby ów fakt udowodnić, wprowadźmy oznaczenia takie, jak na rysunku 5. Niech w szczególności $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ będzie kątem padania promienia wychodzącego z F_1, $\beta = \frac{\pi}{2} - \beta_1$ zaś kątem załamania tego promienia. Wykażemy, że gdy γ jest owalem Kartezjusza, to stosunek $\sin\alpha/\sin\beta$ jest stały (tak, jak każe prawo Sneliusa załamania światła). Zgodnie z równaniem (1) mamy

$$d_1 + md_2 = \text{const}\,,$$

gdzie $d_1 = MF_1$, $d_2 = MF_2$. Różniczkując, dostajemy stąd równanie $d_1' + md_2' = 0$ (primy oznaczają tu różniczkowanie względem długości łuku s). Zauważmy teraz, że $d_1' = \sin\alpha$, $d_2' = \sin\beta$. Przyjmijmy bez zmniejszenia ogólności, że $F_1 = (0,0)$. Wtedy

$$d_1' = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{3}$$

Po prawej stronie widać wyraźnie iloczyn skalarny dwóch wektorów. Jeden z nich jest równoległy do $F_1M = [x,y]$ i ma długość 1, drugi – to wektor $[x', y']$. Kładąc $\mathbf{r} = [x,y]$ i wykorzystując odpowiedni wzór redukcyjny, przepisujemy równanie (3) w postaci

$$d_1' = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\cdot\mathbf{r}' \equiv \cos\angle(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \cos\alpha_1 = \sin\alpha$$

(trzeba tylko jeszcze pamiętać, że wektor prędkości $\mathbf{r}'$ krzywej sparametryzowanej długością łuku ma długość 1). Analogicznie wykazujemy, że $d_2' = \sin\beta$. Stąd już natychmiast wynika, że

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d_1'}{d_2'} = -m = \text{const}\,.$$

Warto wspomnieć jeszcze o *paraboli Kartezjusza* zwanej także czasem *trójzębem Newtona*. Nie jest to wcale parabola, lecz krzywa o równaniu $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. By ją ujrzeć, wystarczy narysować wykres sumy funkcji kwadratowej i funkcji $y = d/x$, albo, mówiąc inaczej, dodać parabolę i hiperbolę (patrz rys. 6, na którym przy pewnej dozie dobrej woli można istotnie zobaczyć trójząb). Wedle Newtona, Kartezjusz wykorzystywał tę krzywą w swych konstrukcjach pierwiastków równań wielomianowych.

Kartezjusz studiował także inne krzywe. W 1638 roku rozpatrywał ciekawą spiralę (tzw. równokątną lub logarytmiczną) o równaniu $r(\theta) = \alpha\exp(\theta\operatorname{ctg}\alpha)$ (patrz rys. 7, który tłumaczy nazwę; α jest ustaloną liczbą, a r i θ to współrzędne biegunowe). Jakub Bernoulli nazwał tę krzywą *spira mirabilis* i chciał mieć ją wyrzeźbioną na swym grobie w Bazylei. Długość łuku spirali od środka układu współrzędnych do punktu P, leżącego na niej w odległości d od środka układu, jest skończona i równa się $d/\cos\alpha$.

Kartezjusz interesował się też własnościami cykloidy (jest m.in. autorem konstrukcji stycznej do tej krzywej). Gdy dumny Roberval doniósł mu w liście o swym wzorze na pole pod łukiem cykloidy ($3\pi r^2$, gdzie r jest promieniem koła, którego punkt zakreśla cykloidę), Kartezjusz odpisał, że wynik

jest ładny i nie zauważyłem go wcześniej, lecz dowód nie sprawiłby trudności żadnemu średnio zręcznemu geometrze.

Nam wszystkim pozostaje wybaczyć Kartezjuszowi zgryźliwość i mieć nadzieję, że też zostalibyśmy uznani za *zręcznych*, choć może tylko *średnio*.

Paweł STRZELECKI