400 lat temu nie tylko przeniesiono stolicę Polski do Warszawy, lecz także urodził się René Descartes, Kartezjusz. Dla dziejów naszego świata to niezmiernie ważna okoliczność. W Europie nagromadziło się wtedy niesłychanie wiele czynników, które miały odmienić życie jej mieszkańców (i całej kuli ziemskiej). Zmieniła się i mapa polityczna, i sposoby chwalenia Najwyższego, wymyślono mikroskop (co dało nam maleńkich sąsiadów – mikroby) i teleskop (co dało nam księżyce Jowisza, a wraz z nimi nadzieję, że nie jesteśmy w Kosmosie sami), ciała niebieskie nareszcie zaczęły krążyć po elipsach (i powszechne ciążenie było tuż za progiem), rośliny po raz pierwszy jawnie zaczęły odżywiać się powietrzem, słowem – wszystko zmierzało ku koleinom, które z naszego dzisiejszego punktu widzenia nazwać by wypadało normalnością.

I tylko potrzebny był ktoś, kto powiedziałby, że myślimy teraz zupełnie odmiennie – może mądrzej, ale na pewno inaczej. Kto jasno stwierdziłby, że jest to początek nowego świata. I tę właśnie rolę spełnił Kartezjusz stwarzając język i metodę nowego myślenia. Jego miejsce w naszym świecie jest tak eksponowane, że przypisuje się mu nawet rzeczy, których nie zrobił. I tak np. kartezjański układ współrzędnych wprowadził Pierre Fermat. XVIII-wieczną kłótnię o kształt geoidy (wrzeciono czy dysk) opisuje się jako kartezjańsko-newtonowską, choć strona francuska była w niej reprezentowana przez Jeana i Jacquesa Cassinich. Tak więc przypisuje się Kartezjuszowi wszystko – dobre i złe.

I słusznie – za wszystko bowiem, co nazywa się nauką nowożytną, odpowiedzialność ponosi.

W tym numerze zamieszczamy trzy wypowiedzi na jego temat.

Czwartą, może bardziej sceptyczną (względem nas – współczesnych, nie względem niego) zamieścimy w następnym numerze.

Kartezjusz – matematyk

Roman MURAWSKI

Kartezjusz, uznawany za ojca filozofii nowożytnej, zajmował się również matematyką. Choć był niewątpliwie jednym z najbardziej matematycznie uzdolnionych myślicieli swej epoki, to jego główne zainteresowania nie koncentrowały się jednak na matematyce, lecz na filozofii i naukach przyrodniczych. Napisał właściwie tylko jedno dzieło poświęcone matematyce, niemniej jego znaczenie dla matematyki jest ogromne.

Prace matematyczne Kartezjusza wyrastały z jego poszukiwań ogólnej metody myślenia, która ułatwiałaby robienie wynalazków i poszukiwanie prawdy w nauce, przy czym to właśnie matematyka miała dostarczać wzorca metody naukowej. Wynikiem jego rozważań metodologicznych była zasada badania metody przed badaniem rzeczy. Kryterium pewności w nauce stanowi, według Kartezjusza, jasność i wyraźność idei. Głosił program powszechnej wiedzy racjonalnej na wzór matematyki. W pracy *Rozmowa z Burmanem* pisał: „Matematyka zaś przyzwyczaja do poznawania prawdy, ponieważ w matematyce występują trafne rozumowania, jakich nigdzie poza tym nie znajdziesz. I dlatego ten, kto raz nagiął swój umysł do rozumowań matematycznych, będzie miał również [umysł] zdolny do poszukiwania innych prawd, skoro rozumowanie wszędzie jest jedno i to samo”.

Descartes R., *Rozmowa z Burmanem*, w: *Medytacje o pierwszej filozofii wraz z Zarzutami uczonych mężów i Odpowiedziami autora oraz Rozmowa z Burmanem*, tłum. I. Dąmbska, PWN, Warszawa 1958, s. 296.

Według Kartezjusza jedynie matematycy umieją znajdować dowody i dzięki temu dostarczać wiedzy pewnej. Źródeł tej umiejętności dopatruje się on w fakcie, że w matematyce rozważa się same tylko własności ilościowe. W *Prawidłach kierowania umysłem* pisał: „(...) ściśle do matematyki odnosi się to wszystko, w czym bada się porządek i miarę, bez względu na to, czy owej miary szukać należy w liczbach czy figurach, gwiazdach, dźwiękach, czy w jakimkolwiek innym przedmiocie; musi zatem istnieć jakaś ogólna nauka, która by wyjaśniała to wszystko, co może być przedmiotem badań odnośnie do porządku i miary nie przysługujących żadnej szczególnej materii”.

Descartes R., *Prawidła kierowania umysłem*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958, s. 21.

Naukę tę proponował nazwać matematyką uniwersalną – „ona [bowiem] zawiera to wszystko, dzięki czemu inne nauki nazywają się matematycznymi” (tamże). Pewność zaś matematyki wynika, według Kartezjusza, z tego, że „one [tzn. arytmetyka i geometria] (...) jedynie zajmują się tak czystym i prostym przedmiotem, iż niczego zupełnie nie zakładają, co by doświadczenie czyniło niepewnym, ale polegają całkowicie na rozumowym wyprowadzaniu wniosków. Są więc one ze wszystkich najłatwiejsze i najjaśniejsze” (tamże, s. 8). Z przekąsem dodawał też, że: „Wszelako nie powinno nas dziwić, jeśli wiele umysłów przykłada się chętniej do innych nauk lub do filozofii [w pojmowaniu scholastycznym – przypis tłumacza]: pochodzi to bowiem stąd, że każdy śmielej pozwala sobie na snucie przypuszczeń w rzeczy niejasnej niż oczywistej i że o wiele łatwiej jest o jakiejkolwiek kwestii czynić domysły, aniżeli dojść do samej prawdy w jednej kwestii, chociażby bardzo łatwej” (tamże, s. 9). W samej matematyce należy, według Kartezjusza, stosować metody analityczne – dopuszczał on przy tym tylko intuicję i dedukcję. Przez intuicję rozumiał „tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, które pochodzi z samego rozumu, a jako prostsze jest pewniejsze nawet od dedukcji” (*Prawidła*..., s. 12). Przez dedukcję zaś rozumiał „to wszystko, co daje się wysnuć z koniecznością z jakichś innych rzeczy poznanych w sposób pewny” (tamże). Stąd wynika więc w szczególności, że aksjomaty matematyki były dla Kartezjusza prawdami pewnymi i niepodważalnymi.

Omówiwszy poglądy Kartezjusza na metodologię matematyki i na znaczenie tej ostatniej dla nauki jako takiej, przejdźmy do jego osiągnięć na polu samej już matematyki. Wydaje się, że Kartezjusz na serio zainteresował się nią w czasie surowej zimy 1619 roku, którą spędził jako ochotnik w wojsku. Wtedy to prawdopodobnie odkrył formułę, znacznie później znalezioną również przez Eulera, a głoszącą, że $V - E + F = 2$, gdzie V jest liczbą wierzchołków, E liczbą krawędzi, F zaś liczbą ścian dowolnego danego wielościanu zamkniętego.

To odkrycie Kartezjusza ogłoszone zostało dopiero w 1860 roku.

W liście z roku 1628 do jednego z przyjaciół holenderskich pisał Kartezjusz, iż uczynił tak wielkie postępy w arytmetyce i geometrii, że większych nie może już sobie życzyć. Jakie to były osiągnięcia i czego dotyczyły, nie można dokładnie stwierdzić z tej prostej przyczyny, że Kartezjusz niczego nie opublikował. Być może miał on tu na myśli to, co potocznie uchodzi dziś za największe jego osiągnięcie, a mianowicie geometrię analityczną?

Jedynym opublikowanym dziełem matematycznym Kartezjusza jest *La géométrie* z roku 1637. Stanowiła ona ostatni z trzech dodatków do sztandarowego i najbardziej dziś chyba znanego dzieła metodologicznego Kartezjusza, a mianowicie *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (*Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach*, tłum. W. Wojciechowska, PWN, Warszawa 1970). Pozostałe dwa dodatki to *La dioptrique* (*Dioptryka*) i *Les météores* (*Meteory*). Ponieważ późniejsi wydawcy nie widzieli bezpośredniego związku między główną częścią dzieła a dołączonymi dodatkami, w następnych wydaniach *Discours*... dodatki pomijano. *La géométrie* rozpowszechniła się w przekładzie łacińskim (wydanie I: 1649 rok) zaopatrzonym w obszerne komentarze i oryginalne dopełnienia wydawcy. W drugiej połowie XVII wieku stała się książką podręczną wszystkich twórczych matematyków.

W *Discours de la méthode* znajdujemy m.in. ogólne uwagi na temat metod, które powinny być stosowane w nauce, a więc i w matematyce. W szczególności mamy tu cztery prawidła, które – zdaniem Kartezjusza – zupełnie wystarczą w logice. Są one następujące:
(1) „nigdy nie przyjmować za prawdziwą żadnej rzeczy, zanim by jako taka nie została rozpoznana przeze mnie w sposób oczywisty”,
(2) „dzielić każde z badanych zagadnień na tyle cząstek, na ile by się dało i na ile byłoby potrzeba dla najlepszego ich rozwiązania”,
(3) „prowadzić swe myśli w porządku, poczynając od przedmiotów najprostszych i najdostępniejszych poznaniu, i wznosić się po trochu, jakby po stopniach, aż do poznania przedmiotów bardziej złożonych”,
(4) „czynić wszędzie wyliczenia tak całkowite i przeglądy tak powszechne, aby być pewnym, że nic nie zostało pominięte”.

Odnajdujemy więc tu zarówno postulat nieuznawania żadnego zdania, które nie jawi się jasno i wyraźnie (zasada (1)), jak i zachętę do stosowania metody analitycznej (zasada (2)) oraz dedukcji (zasada (3)). Zasady te stanowią fundament logiki matematycznej i metody aksjomatyczno-dedukcyjnej i są podstawowymi zasadami, na podstawie których rozwijamy dziś teorie matematyczne.

Przejdźmy teraz do omówienia ściśle matematycznej części *Discours de la méthode*, czyli dodatku *La géométrie*. Zacznijmy omawianie go od stwierdzenia, że był on wynikiem zastosowania przez Kartezjusza jego ogólnej metody unifikacji, o której mówiliśmy na początku – w tym przypadku chodziło o unifikację geometrii i algebry. Powiedzmy też od razu, że wbrew potocznym opiniom nie znajdujemy w tym dziele systematycznego wykładu geometrii analitycznej w dzisiejszym sensie! Cel, jaki stawiał sobie Kartezjusz w tej pracy, daje się jasno odczytać już z pierwszego, otwierającego ją zdania: „Dowolny problem geometryczny można łatwo przeformułować w takich terminach, że do jego konstrukcji wystarczy znajomość długości pewnych linii”. Celem Kartezjusza było więc z jednej strony zastosowanie algebry do geometrii i uwolnienie w ten sposób tej ostatniej od konieczności stosowania wykresów, a z drugiej, nadanie znaczenia operacjom i działaniom arytmetycznym poprzez odpowiednie zinterpretowanie ich za pomocą pojęć geometrycznych. Zastosowana przezeń w *La géométrie* metoda polegała na wyjściu od pewnego problemu geometrycznego, przetłumaczeniu go na język równań algebraicznych, a następnie, po uproszczeniu odpowiedniego równania, rozwiązaniu go metodami geometrycznymi. W ten sposób każda z gałęzi matematyki dawała to, co posiadała najlepszego dla rozwiązania rozważanego problemu. Widać więc tu wyraźnie ideę unifikacji matematyki. A była to idea bardzo istotna i potrzebna, jeśli zważyć fakt, że od starożytności arytmetyka i geometria rozwijały się właściwie jako osobne, nie mające żadnego związku, dziedziny (pierwsza dotyczyła wielkości dyskretnych, druga – ciągłych).

Dodatek *La géométrie* składał się z trzech części (ksiąg). W pierwszej z nich znajdujemy jedynie podstawowe zasady tego, co dziś zwiemy geometrią analityczną, szczegółowe badania nad znajdowaniem rozwiązań równań kwadratowych oraz pewne rozważania nad problemem postawionym przez Pappusa, tzn. nad problemem miejsca geometrycznego takich punktów, że iloczyn ich odległości od n prostych jest w stałym stosunku do iloczynu ich odległości od n lub $n-1$ innych prostych. Mówiąc tu o zaczątkach geometrii analitycznej trzeba zaznaczyć, że Kartezjusz nie używał współrzędnych dla określenia położenia punktu, nie myślał też o współrzędnych jako o parze liczb.

W księdze drugiej mamy rozważania nad „owalami Kartezjusza". Kartezjusz rozważa tam m.in. równania postaci:

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

i podaje warunki, kiedy równanie to przedstawia hiperbolę, kiedy parabolę, a kiedy elipsę. Podaje także metodę znajdowania stycznej do danej stożkowej.

Księga trzecia podejmuje na nowo problematykę księgi pierwszej, tzn. konstrukcję pierwiastków równań algebraicznych. Znajdujemy tu m.in. „regułę znaków Kartezjusza", która głosi w uproszczeniu, że równanie algebraiczne $f(x) = 0$ ma co najwyżej tyle pierwiastków dodatnich, ile mamy zmian znaku w ciągu współczynników w $f(x)$ i co najwyżej tyle pierwiastków ujemnych, ile mamy zmian znaku w ciągu współczynników w $f(-x)$. Kartezjusz był przekonany, że wszystkie problemy nauk matematycznych mogą być wyrażone za pomocą równań algebraicznych różnych stopni. Ogólną metodę rozwiązywania takich równań stanowi ich wykreślanie. Pierwiastki rzeczywiste równań kwadratowych mogą być wykreślone za pomocą przecięcia okręgu i prostej, pierwiastki równań stopnia trzeciego i czwartego wykreśla się za pomocą przecięcia okręgu i paraboli, dalej pierwiastki równań stopnia piątego i szóstego wykreśla Kartezjusz za pomocą okręgu i krzywej rzędu 3 zwanej dziś parabolą Kartezjusza lub trójzębem Newtona. Ogólnie konstrukcji pierwiastków równania stopnia $n > 3$ dokonuje się, według Kartezjusza, za pomocą dwóch krzywych rzędu niższego niż n, których punkty wykreśla się na podstawie rozwiązania równań stopnia także niższego niż n.

Dodajmy, że celem Kartezjusza w *La géométrie* było raczej zakomunikowanie uzyskanych wyników niż ich wyjaśnianie. Stąd wykład jest raczej mało systematyczny, a dowody z reguły pominięte czy „zastąpione" uwagami typu: „Nie będę zatrzymywał się tu nad podawaniem szczegółów, ponieważ pozbawiłbym w ten sposób czytelnika przyjemności znalezienia ich samemu".

Znaczenie *La géométrie* polega nie tylko na pewnej unifikacji geometrii i algebry oraz stworzeniu w ten sposób zaczątków geometrii analitycznej, ale także na ostatecznym przezwyciężeniu ograniczeń wynikających z zasady jednorodności. Aby wyjaśnić tę kwestię, musimy cofnąć się do starożytnej Grecji, do momentu odkrycia wielkości niewspółmiernych. Otóż jednym ze sposobów wyjścia z trudności ujawnionych przez to odkrycie była tzw. algebra geometryczna. Polegała ona na zastąpieniu liczb i wykonywanych na nich działań przez figury geometryczne i operacje na nich wykonywane. Liczba stała się w ten sposób odcinkiem otrzymanym z odcinka przyjętego za jednostkę przez dodawanie skończoną liczbę razy, kwadrat liczby był polem, a sześcian – objętością odpowiedniej figury.

W konsekwencji więc wyrażenia typu $a^2 + b - c^3$ nie miały sensu. Kartezjusz zerwał ostatecznie z tym ograniczeniem interpretując potęgi liczby po prostu jako długości linii. Odrzucenie ograniczeń wynikających z zasady jednorodności pozwoliło mu na traktowanie każdego równania algebraicznego po prostu jako związku między liczbami. Stanowiło to istotny postęp w abstrakcji matematycznej.

Mówiąc o zasługach Kartezjusza dla matematyki należy też koniecznie wspomnieć o tym, że wprowadził on wiele nowoczesnych oznaczeń. *La géométrie* jest właściwie najdawniejszym tekstem matematycznym, który dzisiejszy matematyk może czytać bez kłopotów i trudności ze zrozumieniem stosowanej symboliki. Wiele z symboli używanych przez Kartezjusza jest stosowanych (z niewielkimi zmianami) do dziś. Dla przykładu: znajdujemy u niego wyrażenia postaci $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Różni się ono od tego, co napisalibyśmy dziś, jedynie tym, że mamy tu aa zamiast dzisiejszego a^2 – choć dodać trzeba, że znajdujemy u Kartezjusza a^3 zamiast aaa, czy a^4 zamiast $aaaa$.

Podsumujmy zasługi Kartezjusza jako matematyka. Jest on właściwie autorem tylko jednego dzieła matematycznego, do tego dzieła nie samodzielnego, lecz stanowiącego jedynie jeden z trzech dodatków do innej pracy. Postać Kartezjusza nie może być jednak pominięta przez żadnego historyka matematyki. Na trwałe wpisał się on w dzieje tej (i nie tylko tej!) nauki przede wszystkim przez swoje rozważania metodologiczne. I choć postulat stworzenia matematyki uniwersalnej (rozwinięty później przez G.W. Leibniza w postaci projektu *characteristica universalis*) nie daje się w pełni zrealizować, to sformułowane przez Kartezjusza zasady i reguły do dziś wyznaczają metody budowania i rozwijania teorii naukowych, w szczególności zaś teorii matematycznych. Fakt, że wydają nam się one dziś oczywiste, to tylko dowód na to, jak dobrze zadomowiły się one w naszej metodologii. Jeśli chodzi o kwestie ściśle już matematyczne, to zasługą Kartezjusza pozostaje niewątpliwie unifikacja matematyki, dokładniej algebry i geometrii, i przez to stworzenie idei geometrii analitycznej (przypominają o tym m.in. stosowane dziś nazwy takie, jak „produkt (iloczyn) kartezjański" czy „współrzędne kartezjańskie"). Dalej, ostateczne przezwyciężenie ograniczeń zasady jednorodności, co stanowiło nieodzowny krok umożliwiający ogólne traktowanie krzywych algebraicznych, a w dalszej perspektywie rozwój abstrakcji matematycznej. Kartezjusz przyczynił się też do rozwoju symboliki matematycznej wprowadzając wiele symboli i oznaczeń funkcjonujących z powodzeniem do dziś.