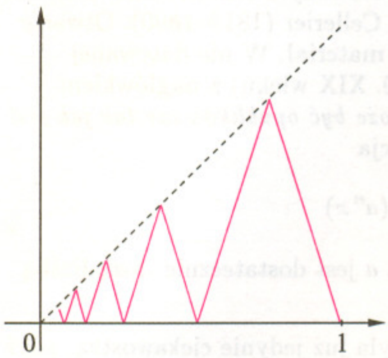
Zwariowane funkcje

Janusz OLSZEWSKI



Rys. 1. Funkcja ciągła z odcinka $[0,1]$ w $\mathbf{R}$ z przeliczalną liczbą punktów nieróżniczkowalności.

Czytelnicy *Delty* wiedzą zapewne, że **funkcja, która w pewnym punkcie przedziału ma pochodną, jest w tym punkcie ciągła**. Fakt odwrotny nie jest prawdziwy. Łatwo podać stosowny przykład: funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła na całej prostej rzeczywistej, ale w punkcie $x = 0$ nie ma pochodnej. Ogólnie, dowolna funkcja nie jest różniczkowalna w tych punktach, w których jej wykres ma „dziobki". Korzystając z tej obserwacji, nietrudno skonstruować funkcję ciągłą na odcinku (powiedzmy $[0,1]$), która ma nieskończoną liczbę punktów nieróżniczkowalności (patrz rys. 1).

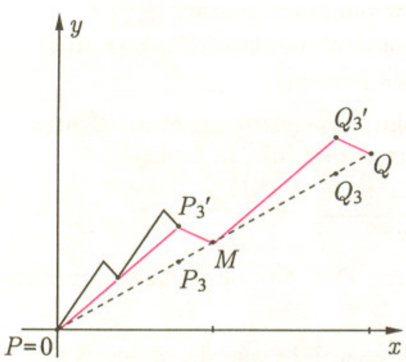
Wszystkie przykłady funkcji ciągłych, jakie podpowiada nam intuicja, są w „większości" punktów różniczkowalne. Niemniej jednak istnieją zwariowane funkcje ciągłe, które są nieróżniczkowalne w każdym punkcie. Historia ich odkrycia jest długa i obfituje w wiele niespodzianek.

Matematycy w XVII i XVIII wieku nie interesowali się pytaniem o istnienie pochodnej zadanej funkcji $f(x)$, tylko po prostu $f'(x)$ obliczali – co prawie zawsze im się udawało. Jedną z pierwszych świadomych prób dowodzenia ogólnych twierdzeń w rachunku różniczkowym była praca Ampère'a z 1806 roku, poświęcona teorii „dowolnych" funkcji. Ampère udowodnił w niej, że dowolna funkcja, niekoniecznie ciągła, ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, z wyjątkiem niektórych „wyjątkowych i izolowanych" wartości argumentu.

Wiara w wynik Ampère'a przez długi czas (około 70 lat) była tak wielka, że z chwilą wprowadzenia przez Cauchy'ego w 1821 roku pojęcia funkcji ciągłej pojawiły się natychmiast wnioski z twierdzenia Ampère'a, dotyczące istnienia pochodnej funkcji ciągłej (formułowali je m.in. L. Raabe, S.F. Lacroix, E. Galois, J.M.C. Duhamel, C. Freycinet, J. Bertrand, J.A. Serret, R. Rubini). A gdy dodamy do tego, że nawet po opublikowaniu pierwszych przykładów funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych ukazywały się „dowody" twierdzeń typu Ampère'a (wśród ich autorów wspomnimy tylko Bertranda, Garceta i Königsbergera – ucznia Weierstrassa!), to i tak nie uzyskamy pełnego obrazu tego, jak głęboko w ludzkiej świadomości zakorzenione były wcześniejsze poglądy.

Pierwszym matematykiem, dla którego było całkowicie jasne, że ciągłość nie implikuje różniczkowalności, był zapewne czeski duchowny i filozof Bernard Bolzano. Około 1830 roku, w rękopisie, który odnaleziono i opublikowano prawie sto lat później, Bolzano nie tylko zaznacza, że oba pojęcia są słabo związane, lecz konstruuje przykład funkcji ciągłej i dowodzi jej nieróżniczkowalności na gęstym podzbiorze przedziału (Bolzano uważał, że w pozostałych punktach przedziału jego funkcja jest różniczkowalna). Definicja Bolzano jest geometryczna i opiera się na następującej podstawowej operacji.

Niech PQ (krzywa B_0) będzie odcinkiem nachylonym pod kątem ostrym do osi OX (patrz rys. 2). Podzielmy go punktem M na połowy, a następnie każdy z odcinków PM i MQ podzielmy na cztery równe części. Punkty podziału oznaczmy P_1, P_2, P_3 i Q_1, Q_2, Q_3. Niech P_3' będzie odbiciem P_3 względem prostej poziomej przechodzącej przez M, a Q_3' – odbiciem Q_3 względem prostej poziomej przechodzącej przez Q. Linię łamaną $PP_3'MQ_3'Q$ nazwiemy B_1.

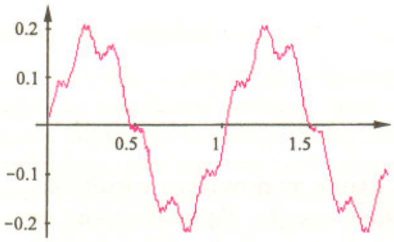


Rys. 2. Krzywa B_0, krzywa B_1 (kolor) i fragment krzywej B_2 (czarny).

Stosując powyższą operację do każdego z czterech odcinków łamanej B_1 otrzymamy linię łamaną B_2 złożoną z 4^2 odcinków. Kontynuując ten proces, otrzymamy nieskończony ciąg krzywych B_0, B_1, $B_2, \ldots$ zbieżny do pewnej krzywej B, którą nazywamy krzywą Bolzano.

Wkrótce po odnalezieniu rękopisów Bolzano udowodniono (V. Jarnik, K. Rychlik, G. Kowalewski, A.N. Singh), że funkcja, której wykresem jest krzywa B, jest nigdzie nieróżniczkowalna. Tak więc w pierwszej połowie

XIX wieku był już skonstruowany przykład funkcji ciągłej nigdzie nieróżniczkowalnej, jednak nikt o nim nie wiedział, podobnie jak mało kto słyszał o księdzu Bolzano.



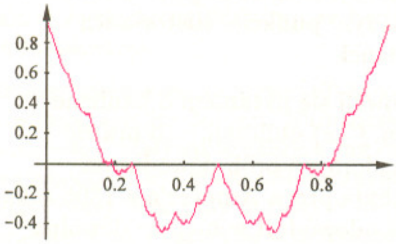
Rys. 3. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $C(x)$ dla $a = 6$.

Bardziej radykalne od Bolzano poglądy w dyskutowanym temacie miał nieznany za swego życia matematyk szwajcarski Charles Cellerier (1818–1890). Otwarte po jego śmierci rękopisy zawierały rewelacyjny materiał. W nie datowanej teczce (według historyków pochodzącej z lat 50. XIX wieku) z nagłówkiem *„Bardzo ważne i myślę, że nowe. Poprawne. Może być opublikowane tak jak jest napisane."* znajdował się dowód faktu, że funkcja

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x)$$

jest ciągła, lecz nigdzie nieróżniczkowalna, jeśli a jest dostatecznie dużą liczbą parzystą.

Publikacja przykładu Celleriera w 1890 roku była już jedynie ciekawostką, gdyż od co najmniej 15 lat znana była powszechnie funkcja Weierstrassa



Rys. 4. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $W(x)$ dla $a^{-1} = b = 2$ (jak wykazał Hardy, funkcja Weierstrassa jest nieróżniczkowalna w każdym punkcie dla $ab \geq 1$).

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

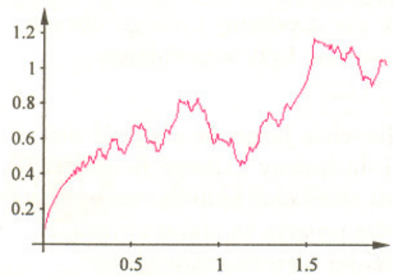
ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna dla $0 < a < 1$ i takich nieparzystych b, że $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Prawie nie do uwierzenia jest fakt, że sam Weierstrass nigdy nie opublikował swego odkrycia, chociaż przedstawił je Berlińskiej Akademii Nauk 18 lipca 1872 roku. Świat dowiedział się o funkcji $W(x)$ z pracy Paula du Bois Reymonda opublikowanej w 1875 roku.

Wygłaszając odczyt o swojej funkcji Weierstrass powiedział m.in.

Jak dowiedziałem się od niektórych uczniów Riemanna, on jako pierwszy (około roku 1861 lub wcześniej) wskazał myśl przedstawienia kontrprzykładu [dla twierdzenia Ampère'a — przyp. aut.]*; na przykład funkcja*

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

nie spełnia tego twierdzenia. Niestety, dowód Riemanna nie był publikowany i wydaje mi się, że nie znajduje się w jego notatkach ani w ustnych przekazach (...). Uważam, że Riemann miał na myśli funkcje [ciągłe]*, które nie mają pochodnej dla żadnej wartości argumentu. Dowód tego faktu wydaje mi się w pewnej mierze trudny...*



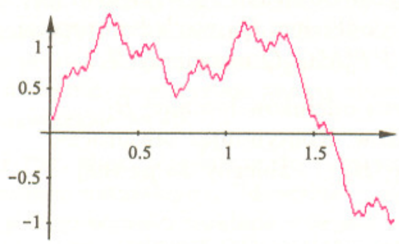
Rys. 5. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $R(x)$.

O trudnościach, jakie nastręcza analiza przykładu Riemanna, świadczy nie tylko powyższe zdanie Weierstrassa, lecz także i to, że do końca XIX wieku nie pojawił się dowód lub kontrprzykład do twierdzenia Riemanna (o tym, że funkcja $R(x)$ jest nigdzie nieróżniczkowalna). Dopiero w 1916 roku G.H. Hardy wykazał, że funkcja Riemanna nie ma pochodnej w punktach postaci πy, gdzie y jest liczbą niewymierną, bądź wymierną postaci $\frac{2m}{4n+1}$ lub $\frac{2m+1}{2(2n+1)}$ $(m, n \in \mathbf{Z})$. Natomiast w 1970 roku, a więc ponad sto lat po śmierci Riemanna, Joseph Gerver obliczył, że w punktach postaci $\frac{2m+1}{2n+1}\pi$ funkcja $R(x)$ ma pochodną równą $-\frac{1}{2}$ (w pozostałych punktach funkcja $R(x)$ jest nieróżniczkowalna, co Gerver udowodnił rok później).

Niezależnie od Weierstrassa, 19 marca 1873 roku na posiedzeniu Francuskiego Towarzystwa Matematycznego Gaston Darboux udowodnił, że funkcja

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}$$

jest ciągła i nigdzie nieróżniczkowalna. Swą pracę Darboux opublikował drukiem w 1875 roku.



Rys. 6. Wykres sumy pierwszych dwudziestu wyrazów szeregu $D(x)$.

Publikacja przykładów Weierstrassa i Darboux wywołała wśród matematyków popłoch i zamieszanie. *W jaki sposób intuicja mogła nas zawodzić do tego stopnia?* – pytał Henri Poincaré. Jeszcze drastyczniej zareagował inny matematyk francuski, Charles Hermite:

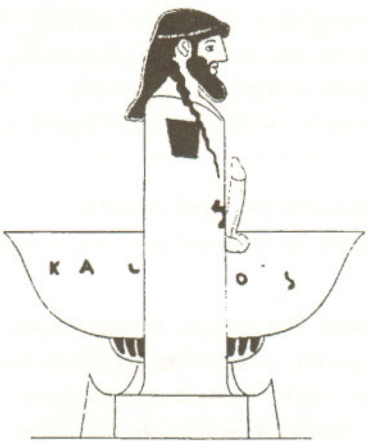
Odwracam się ze wstrętem i przerażeniem od tych godnych opłakiwania wrzodów, funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych...

Zaś du Bois Reymond pisał o funkcji Weierstrassa tak:

...jest to jeden z najbardziej poruszających wyników współczesnej matematyki, że jedna funkcja może być we wszystkich punktach swego przedziału ciągła, nie mając dla żadnego punktu tego przedziału pochodnej.

Dalej jednak przestrzegał:

Wydaje mi się, że w metafizyce funkcji Weierstrassa tkwi jakaś zagadka i nie mogę uchronić się przed myślą, że zagłębienie się w ten przykład doprowadzi do granicy naszego intelektu.



Wbrew przestrogom du Bois Reymonda matematycy intensywnie badali funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne, i to z niezłym skutkiem. Ukazało się wiele prac, w których ulepszano i uogólniano stare wyniki, konstruowano nowe przykłady oraz całe klasy przykładów, badano strukturę zbioru funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych. Warto zaznaczyć, że istotny wkład w rozwój tych badań wnieśli matematycy polscy (wśród nich Auerbach, Banach, Kaczmarz, Marcinkiewicz, Mazurkiewicz, Orlicz, Ruziewicz, Saks, Sierpiński, Steinhaus i Zygmund). Okazało się, na przykład (to polski wynik), że tytułowych bohaterek (tzn. funkcji ciągłych bez pochodnej w żadnym punkcie) jest wśród funkcji ciągłych w pewnym sensie o wiele więcej, niż porządnych funkcji różniczkowalnych choćby w jednym punkcie. Funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne mają też swoją realizację w naturze, np. jako trajektorie ruchów Browna.

Podkreślmy na koniec, że funkcje ciągłe bez pochodnych nie są obecnie tematem prac tylko z historii matematyki. W rozwijającej się teorii chaosu czy w badaniach fraktali takie funkcje pojawiają się w naturalny sposób. Wiele ich własności pozostaje jeszcze do odkrycia. Poszukiwacze laurów i sławy mogą np. spróbować udowodnić otwartą hipotezę głoszącą, że wymiar Hausdorffa wykresu funkcji $W(x)$ jest równy $2 + \frac{\log a}{\log b}$.

Polecamy *Foton*

Od kilku lat Zofia Gołąb-Meyer, przy wsparciu Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, wydaje dwumiesięcznik *Foton* – pismo dla nauczycieli fizyki i ich uczniów. W lutym 1996 roku ukazał się już 40. numer *Fotonu*. Warto w nim polecić artykuł Andrzeja Warczaka o Röntgenie (z okazji 100. rocznicy odkrycia promieni rentgenowskich) i Barbary Blicharskiej o oddziaływaniu promieniowania elektromagnetycznego na organizmy żywe oraz zbiór podstawowych wielkości fizycznych i jednostek stosowanych w dozymetrii. Michał Praszałowicz w postaci autodialogu przedstawił Studia Matematyczno-Przyrodnicze na UJ. Numer 41 nosi nazwę *Info-foton*. Jego tematem wiodącym są fraktale oraz zastosowania komputerów w matematyce i fizyce. Andrzej Dyrek przedstawił program „Mathematica – System do uprawiania matematyki na komputerach". Stałe działy: Co nowego w fizyce?, Listy, Zadania, Co czytać, Różności itp., czynią z *Fotonu* pismo godne polecenia uczniom i nauczycielom fizyki. *Foton* można zaprenumerować wysyłając 10 zł za kolejnych sześć numerów na konto: *Foton* – Zofia Gołąb-Meyer, PBK SA w Warszawie, III Oddział w Krakowie, nr rachunku 373407-412294-136 lub przekazem pocztowym pod adresem: Zofia Gołąb-Meyer, 30-327 Kraków, ul. Biała Droga 5.