Rozszczepienie jąder uranu i datowanie skał

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Uran jest pierwiastkiem szeroko rozpowszechnionym w przyrodzie. Występuje w niewielkich ilościach w licznych minerałach jako mieszanina kilku izotopów. Przypomnę, że izotopy danego pierwiastka mają jądra atomowe o charakterystycznej dla niego liczbie protonów, która określa ładunek jądra, oraz różne liczby neutronów. Najczęściej występujące izotopy uranu, mającego 92 protony, to

$$^{234}\mathrm{U}\ (0,006\%)\,,\qquad ^{235}\mathrm{U}\ (0,720\%)\,,\qquad ^{238}\mathrm{U}\ (99,274\%)\,,$$

gdzie górny indeks oznacza liczbę masową, czyli łączną liczbę neutronów i protonów w jądrze; w nawiasie umieszczono średnie procentowe rozpowszechnienie danego izotopu.

Izotop ^{238}U podlega samorzutnemu rozszczepieniu, tzn. bez żadnego zewnętrznego oddziaływania rozpada się na dwa mniejsze jądra

$$^{238}\mathrm{U} \to {}^{A_1}X_1 + {}^{A_2}X_2\,,$$

przy czym masa każdego z produktów jest bliska połowie masy ^{238}U. Suma mas jąder $^{A_1}X_1$ i $^{A_2}X_2$ jest mniejsza niż masa ^{238}U, więc energia równoważna różnicy mas zamienia się w energię kinetyczną produktów.

Gdy uran jest domieszką materiału krystalicznego, jądra pochodzące z procesu rozszczepienia powodują mikroskopijne uszkodzenia kryształu wzdłuż torów swojego ruchu. Ślady te są zwykle trwałe; dopiero stopienie kryształu i powtórna krystalizacja usuwa je. Dzięki temu badając próbkę minerału możemy określić liczbę jąder uranu, która uległa w nim rozszczepieniu. Jest ona zatem miarą czasu, jaki upłynął od momentu, gdy początkowo gorący materiał ostygł i nastąpiła krystalizacja. Wyprowadźmy odpowiednią zależność.

Niech $N(0)$ oznacza liczbę jąder ^{238}U znajdujących się w próbce w momencie ostygnięcia. Z upływem czasu t ilość uranu zmniejszała się na skutek procesów rozszczepienia, zgodnie z wykładniczym prawem zaniku

$$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda t}\,,$$

przy czym $\tau = 1/\lambda$ jest czasem równym $6 \cdot 10^{15}$ lat. Liczba jąder, które uległy samorzutnemu rozszczepieniu po czasie t, równa jest

$$N^R(t) = N(0) - N(t) = N(t)\,\left(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1\right)\,.$$

Jeśli znamy $N^R(t)$ i $N(t)$, to czas t wyznaczamy jako

$$t = \tau \ln\left(1 + \frac{N^R(t)}{N(t)}\right)\,.$$

Ponieważ czas zaniku τ jest bardzo długi, dłuższy niż wiek Wszechświata, więc tylko niewielka część jąder uranu zdoła się rozszczepić, tzn. $N(t) \gg N^R(t)$. A zatem logarytm przybliżamy przez funkcję liniową i dostajemy

$$t = \tau\, \frac{N^R(t)}{N(t)}\,.$$

Liczbę jąder uranu, które uległy rozszczepieniu, znajdujemy licząc ślady po produktach rozpadu. W podobny sposób określamy również liczbę jąder, które przetrwały. Naświetlamy próbkę strumieniem neutronów pochodzących z reaktora, czym wywołujemy

Przygody matematyki wśród ludzi (V)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Wygnana królowa

Marek KORDOS

W połowie ubiegłego stulecia, wieku pary i elektryczności, triumf techniki i wiara w jej wszechmoc były całkowite, przekonanie o potencjalnym braku granic poznawczych nauki powszechne, jak też głęboka wiara – że jądrem mądrości, królową, nauką nauk jest matematyka – była ugruntowana. Co więcej, prawie jawnie wypowiadano pogląd, że do odkrycia pozostały ledwie drugorzędne detale. Nastał więc czas porządkowania, doganiania w sensie precyzji sposobu uprawiania nauki, a konkretnie – matematyki, mistrzów ze Starożytnej Grecji. Zaczęło się niebezpieczne przeglądanie się matematyki w lustrze.

Inni twierdzą, że motywem owego zaglądania sobie przez matematyków w trzewia był najbardziej bulwersujący opinię publiczną spośród matematycznych wynalazków – odkrycie geometrii nieeuklidesowej. Okazało się mianowicie, że zmieniając nieznacznie niektóre z założeń, przyjmowanych za pewniki opisujące strukturę przestrzeni, można otrzymać teorię przestrzeni równie wdzięczną, równie poprawną, jak „zwyczajna" geometria. Co gorsza: najpierw powstała jedna taka „niezwyczajna" geometria (Łobaczewski i Bolyai), później (na wyraźne polecenie służbowe Gaussa) Bernhard Riemann wyprodukował ich nieprzebrane mrowie (słynna praca *O hipotezach leżących u podstaw geometrii*). Skoro więc dla przestrzeni można było wskazać wiele opisujących ją teorii, które wykluczały się wzajemnie, przekonanie, że matematyka jest wiedzą przyrodniczą, nie dawało się utrzymać. A przecież tak pitagorejczycy, jak ludzie XVII wieku, czyli ci, którzy matematykę ufundowali, mieli się za badaczy przyrody, natury.

Pogodzenie się matematyki z przyrodoznawstwem zaproponował Hermann Helmholtz – w pracy, o tytule naśladującym tytuł pracy Riemanna, *O faktach, które leżą u podstaw geometrii* pisze on, że geometria (i zresztą cała matematyka) są dla przyrodoznawstwa skrzynką z narzędziami – przyrodnik sięga po takie narzędzie, jakie jest mu w danej chwili potrzebne, lub – częściej – jakie bardziej lubi i umie stosować. W zasadzie to samo twierdził 2200 lat wcześniej Arystoteles, ale wtedy był zdecydowanie w mniejszości. Takie postawienie sprawy jednak jeszcze wyostrzyło pytanie, czym są i co opisują teorie matematyczne.

Czy jednak była to pycha matematyków, czy utrata związku z naturą przez matematykę, tak czy owak pytania o sens uprawianej dyscypliny stały się bardzo na czasie, a odpowiedzi na nie coraz bardziej konieczne. Nie sposób jest dziś stwierdzić, czy droga, jaką matematyka wybrała dla siebie, była najlepsza z możliwych. Sto lat temu jednak wybór został dokonany i dziś można już tylko odnotować jego konsekwencje.

Wybór ten kazał traktować matematykę jak najbardziej formalnie, wręcz jako teorię napisów, a za podstawową dyscyplinę matematyki (podstawową w tym sensie, że wszelkie inne w niej szukać mają potwierdzenia i kryteriów prawdziwości swoich stwierdzeń) uznano teorię mnogości, czyli teorię zbiorów. Wybór ten okazał się ze wszech miar nieszczęśliwy. Z tym jednak, że pierwsze nieodwracalne objawy nieszczęścia odnotowano dopiero w latach trzydziestych XX wieku (Kurt Gödel), a ostateczne ciosy padły w latach sześćdziesiątych (Paul Cohen).

Nieszczęścia te to zawiedzione nadzieje: okazało się, że nasze formalne teorie nigdy nie będą tak eleganckie, jak tego od nich zażądaliśmy, że prawdziwość stwierdzeń o całej matematyce musi być tak samo warunkowa, jak poszczególne twierdzenia tej matematyki (czyli: sami musimy przyjąć jakieś założenia i dopiero z nich w sposób pewny uzyskujemy następne fakty), wreszcie, że różnych matematyk jest tak samo wiele, jak samych teorii matematycznych w obrębie każdej z nich.

Z ewentualnych przyczyn wymienionych nieszczęść na pierwszym miejscu wymieniłem pychę, a to z dwóch powodów. Pierwszy to mądrość ludowa – pycha jest pierwszym i najcięższym grzechem: za nią to został szatan strącony do piekieł. Jest jednak i drugi powód, znacznie bardziej dla ogółu ludzi znaczący. Otóż znajdujący się w uprzywilejowanej sytuacji – tzn. nauczający najważniejszego, jak sądzono, przedmiotu – nauczyciele matematyki dali w przeciągu stulecia piękny pokaz tego, jak może się komu przewrócić w głowie. Od połowy XIX stulecia program powszechnego

procesy rozszczepienia, lecz nie samorzutnego, tylko indukowanego. Pewna komplikacja wiąże się z faktem, że rozszczepieniu spowodowanemu przez neutrony podlega izotop 235, nie zaś 238. (Ta własność sprawia, że uran wykorzystywany w reaktorach czy bombach atomowych jest wzbogacany, tzn. zawiera znacznie więcej izotopu 235 niż uran naturalny.) Znając liczbę neutronów, którymi naświetlono próbkę, oraz prawdopodobieństwo zajścia reakcji można wyznaczyć ilość uranu 235. Korzystając ze średniego stosunku zawartości ^{235}U do ^{238}U, który wynosi $7 \cdot 10^{-3}$, znajdujemy, jak dużo uranu 238 przetrwało w próbce.

A jak w praktyce wygląda wyznaczanie wieku minerału? Przygotowuje się niewielkie jego plasterki o starannie wypolerowanych powierzchniach. Ślady jąder pochodzących z procesów rozszczepienia ujawniają się zwykle po wytrawieniu powierzchni. Substancję trawiącą i sposób przeprowadzenia tej operacji (czas, temperatura, itd.) wybiera się w zależności od typu badanego minerału. Na przykład, dla apatytu, minerału fosforanowego występującego w skałach magmowych, stosuje się słaby roztwór kwasu azotowego, a trawienie w temperaturze pokojowej trwa kilka minut. Przeglądając pod mikroskopem wytrawione płytki wyznacza się liczbę śladów rozszczepienia na jednostkę powierzchni. Ślady mają kształt krótkich igiełek, więc płytka przypomina podłogę pod choinką. Następnie próbkę naświetla się neutronami z reaktora, powtórnie wytrawia i przegląda pod mikroskopem, aby ustalić, ile igiełek przybyło. Wiek minerału jest proporcjonalny do stosunku liczb śladów po samorzutnym i indukowanym rozszczepieniu.

W przeciwieństwie do innych metod radiochemicznego datowania skał, opisany sposób pozwala określić czas, jaki upłynął nie od powstania samego materiału, lecz od momentu, gdy materiał ten ostygł i skrystalizował. Dzięki temu badanie śladów po procesach rozszczepienia umożliwia, na przykład, odtworzenie geologicznej historii obszarów wulkanicznych.

Rozwiązanie zadania F 439. Z równania

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

otrzymujemy

$$(E - m_0c^2)(E + m_0c^2) = p^2c^2 .$$

Ponieważ $E_k = E - m_0c^2$, otrzymujemy

$$E_k = \frac{p^2}{m_0 + \frac{E}{c^2}} .$$

W szczególnej teorii względności mamy

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{oraz} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} ,$$

otrzymujemy więc wzór, który należało udowodnić. W granicy małych prędkości ($v/c \ll 1$) przechodzi on we wzór

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} ,$$

gdzie $p = m_0 v$. Z kolei w granicy $v \to c$ otrzymujemy

$$E_k \approx mc^2 .$$

Śnieg z komputera

Eugeniusz JAKUBAS

Z dużym zainteresowaniem przeczytałem artykuł o płatkach śniegu w *Delcie* 2/1996. Po jego lekturze pomyślałem sobie, że nie tylko Natura potrafi budować tak wiele różnorodnych obiektów, w tym nieskończenie różnorodną ilość płatków śniegu. Potrafi to również zrobić Układ Iterowanych Odwzorowań, znany w matematyce pod nazwą IFS – Iterated Function System. Można powiedzieć, że badając IFS poznajemy Naturę lub że Natura działa zgodnie z IFS.

Zasada IFS jest bardzo prosta. Wystarczy wziąć dowolny punkt płaszczyzny i kilka odwzorowań afinicznych postaci

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = d_1x + e_1y + f_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = a_2x + b_2y + c_2 \\ y'' = d_2x + e_2y + f_2 \end{cases}$$

. . . . itd.

Następnie należy przekształcić obrany punkt przez każde przekształcenie tego układu, otrzymane punkty znów przekształcić przez każde z tych przekształceń, itd. W zależności od wartości współczynników $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$, itd. otrzymamy jakiś obiekt geometryczny. Aby był to płatek śniegu, należy dobrać odpowiednio współczynniki, co wymaga trochę pracy i cierpliwości. Oczywiście, może za nas zrobić to komputer. Odpowiedni do tego program w Turbo Pascalu wygląda następująco:

```
program IFS;
uses graph,crt;
var karta,tryb,nrPrz:integer;
  x,y,xNowe,yNowe:real;
const t:array[1..6,1..6] of real=
     ((0.3,0.7,0,-0.3,0.7,0),(0.3,-0.7,0,0.3,0.7),(0.3,0,0,0,0.6,0.4),
       (0.3,0,0,0,0.6,-0.4),(0.7,0,-0.3,0,0.3,0),(0.7,0,0.3,0,0.3,0));
begin
 karta:=detect; initGraph(karta,tryb,'');
 randomize;
 x:=0; y:=0;
 repeat
    nrPrz:=random(6)+1;
    xNowe:=t[nrPrz,1]*x+t[nrPrz,2]*y+t[nrPrz,3];
    yNowe:=t[nrPrz,4]*x+t[nrPrz,5]*y+t[nrPrz,6];
    putPixel(round(xNowe*200+320),round(-yNowe*200+240),nrPrz+8);
    x:=xNowe;
    y:=yNowe;
    until keyPressed;
    closeGraph;
end.
```

Wydruki płatków śniegu otrzymane za pomocą tego programu prezentujemy na ostatniej stronie okładki.

Pisane 166 lat temu

Każda próba zastosowania metod matematycznych w badaniach chemicznych musi być traktowana jako głęboko irracjonalna i sprzeczna z duchem chemii. Gdyby jednak analiza matematyczna mogła kiedykolwiek odegrać w chemii istotną rolę – aberracja, która szczęśliwie jest prawie niemożliwa – stałoby się to powodem szybkiej i rozprzestrzeniającej się degeneracji tej nauki.

A. COMTE
„Cours de philosophie positive"

nauczania matematyki ewoluuje nie ku tematom z jakiegoś tam powodu ważnym czy to w praktycznej działalności, czy też w dalszej nauce bądź studiach. Nie – ewoluuje ku specjalnie skonstruowanym tematom, z których wygodnie się odpytuje. A im wygodniej się odpytuje, tym czyni się to bardziej bestialsko – okazja nie tylko złodzieja czyni, bodaj częściej czyni sadystę. I właśnie jako niezrozumiały sadysta jawi się nauczyciel matematyki w dwudziestowiecznej literaturze, nawet tak niewinnej, jak *Ania z Zielonego Wzgórza* czy *Szatan z siódmej klasy*.

W tej sytuacji społeczeństwo, w którym każdy był uczniem i prawie każdy rodzicem, protestuje przeciw przemocy. A bronić matematyki nie ma kto. Królowa matematyka tak bowiem zajęła się wpatrywaniem w lustro i tak głęboko przejęły ją niuanse formalizmów, że o zastosowaniach aktualnie „obrabianej" problematyki w dającej się przewidzieć przyszłości nie ma co marzyć. Tak więc obrona powszechnego nauczania matematyki staje się coraz bardziej typu konfucjańsko–ekologicznego: po pierwsze – zawsze jej uczono i było dobrze, a po drugie – żaden gatunek nie powinien ginąć (jaka szkoda np. że nie umiemy już krzesać ognia za pomocą dwóch patyczków). To nie są ani dobre, ani mocne argumenty.

Znacznie poważniejszą sprawą jest zerwanie również arystotelesowsko-helmholtzowskiego kontraktu z przyrodoznawstwem. Matematyka pod koniec ubiegłego stulecia zajęła się sobą i nawet fizyka musiała już niejednokrotnie dorabiać sobie sama pojęcia matematyczne, bez których obejść się nie mogła. Gdy np. było niezbędne uogólnienie pojęcia funkcji, tak zwane dystrybucje, musiał je stworzyć elektryk Heaviside; oczywiście, matematycy potem pojęcie to dopracowali. Choć nie wiem, czy słusznie powiedziałem „oczywiście": teorię czasoprzestrzeni stworzył, na prośbę Einsteina, jego profesor z politechniki, Hermann Minkowski; w terminologii matematycznej jest to przestrzeń pseudoriemannowska, ale ta nazwa to bodaj wszystko, co do niej wnieśli matematycy: rozwija się tylko te jej części, które fizykom są niezbędne. Fizyka statystyczna, a nawet jej największy twórca, Boltzmann, to czasy wyprzedzające o kilkadziesiąt lat opanowanie rachunku prawdopodobieństwa przez matematyków (1933, Kołmogorow). Do dziś pełno jest rozmaitych specyficznie fizycznych, choć z całą pewnością wadliwych matematycznie, matematycznych tworów stworzonych w przypływie rozpaczy przez fizyków, jak np. całki Feynmana.

Daleko gorzej jest tam, gdzie dyscypliny domagające się matematyki są zdecydowanie w możliwości matematyczne uboższe. W ekonometrii, psychometrii, socjometrii itp. króluje krzywa Gaussa, jako *panaceum* na każdą chorobę.

Lęgną się też obłędnie rozbudzone nadzieje, że oto zjawi się cud i coś, znienacka, przyniesione z matematyki dokona zasadniczego przełomu. Aktualnie takim – z całą pewnością (mówię w swoim imieniu) – czystym nadużyciem jest czynienie nadziei chemikom na przełom, jakiego w ich dyscyplinie może dokonać teoria grafów (jest już parę doktoratów opartych na tej nadziei, patrz opinia Comte'a na poprzedniej stronie). W latach sześćdziesiątych wszystko (kryzysy ekonomiczne, zawały serca, załamania psychiczne, stresy zbiorowe itp.) miało zostać uzdrowione za pomocą teorii katastrof René Thoma. Dziś podobną rolę pełnią fraktale, czyli – w dobrym przybliżeniu – figury samopodobne (tj. takie, że oglądane w dużym powiększeniu prezentują naszym oczom ten sam widok, jak bez tego powiększenia); nikt nie wie, dlaczego tak miałoby być, ale czemu nie?

Społeczną pozycję matematyki obniża jeszcze jej własne dziecko – informatyka. Od chwili odkrycia tranzystora (1949 r.) jej podstawowe narzędzie – komputer – może zdjąć z pleców matki praktycznie wszystkie kłopoty obliczeniowe. W oczach wielu nic więcej w matematyce nie ma – nic więc dla niej nie pozostaje.

Mówiąc o konkretach. Dziś w szkole, najlepszym zwierciadle opinii społecznej, matematyka z pierwszego miejsca spadła, jeśli chodzi o prestiż, w najlepszym razie na trzecie (za angielskim i informatyką). Na studiach jest w środku drugiej dziesiątki (dochodzi prawo, zarządzanie, przeróżne marketingi itp.). Zjawisko to matematyków boli, wielu ludzi – szczególnie starszych – przeraża. Należy jednak pamiętać o jednym: matematyka w centrum zainteresowania społecznego nie znajdowała się prawie nigdy – trzy stulecia Starożytnej Grecji, dwa stulecia dominacji arabskiej, ostatnie trzy stulecia Europy. I to wszystko. Zapewne musi teraz poczekać, aż z jej krystalicznej głębi wyłoni się znów jakaś propozycja, która pociągnie za sobą rzesze fanów. Bo bieżące rachowanie może spokojnie zostawić komputerom.

Jeszcze o Achillesie i żółwiu. Czy Zenon z Elei miał rację?

Tadeusz KRASIŃSKI

Jednym z wielu problemów, które dotarły do nas ze starożytności, są paradoksy Zenona z Elei (żył prawdopodobnie w latach 490–430 p.n.e.). Był on uczniem wybitnego filozofa starożytności Parmenidesa, twórcy szkoły filozoficznej eleatów. Zarówno nauczyciel, jak i jego uczeń wyznawali zasadę filozoficzną, że byt jest jeden, wieczny, nieruchomy, niezmienny i niepodzielny. Doprowadziło ich do tego poglądu czysto dedukcyjne rozumowanie wyprowadzone z jednej podstawowej przesłanki, że byt jest jeden, a niebytu nie ma. Poznanie zmysłowe, które stało w jawnej sprzeczności z ich poglądami, uważali za złudne, niepewne i niewiarygodne. Aby przekonać o tym przeciwników swoich poglądów, Zenon z Elei podał wiele rozumowań, w których wykazywał, że w pojęciach wszelkiej zmiany (np. ruchu) lub mnogości tkwią sprzeczności. Rozumowania te, zwane w starożytności aporiami, znane są pod nazwą paradoksów Zenona. Najbardziej znanymi są paradoksy Zenona o ruchu: Achillesa i żółwia, dychotomii, lecącej strzały oraz stadionu, mające wykazywać, że ruch jest niemożliwy, gdyż zawiera w sobie sprzeczności.

Zajmiemy się jednym z nich, a mianowicie paradoksem Achillesa i żółwia, na który spojrzymy trochę inaczej niż robiono to dotychczas. Teza Zenona z Elei była następująca: szybkonogi Achilles nigdy nie dogoni żółwia, o ile żółw wyruszy do biegu wcześniej (oczywiście, zakładamy, że Achilles biegnie szybciej od żółwia). Wniosek ten wyciągał na podstawie następującego rozumowania: jeśli żółw wyruszy do biegu wcześniej, to w momencie startu Achillesa pokona pewną drogę, powiedzmy a. Gdy drogę a przebędzie Achilles, to żółw w tym czasie przesunie się kawałek dalej, powiedzmy o b. Gdy z kolei Achilles przebędzie odcinek b, to żółw przesunie się o odcinek c itd. Zatem, jak wnioskuje Zenon z Elei, Achilles nigdy nie dogoni żółwia, gdyż to rozumowanie możemy powtórzyć nieskończenie wiele razy. Ponieważ w opinii eleatów jedynie czystym dedukcyjnym rozumowaniem możemy dochodzić do prawdy (a takim było powyższe), więc potoczne doświadczenie ruchu jest złudne. W konsekwencji, ruch nie istnieje.

Paradoks ten wyjaśniano używając do tego elementów teorii szeregów. Mianowicie, nie można z powyższego rozumowania wyciągnąć wniosku, że **nigdy** Achilles nie dogoni żółwia. Prostym rozumowaniem wykażemy, że rzeczywiście Achilles nie dogoni żółwia, ale tylko do określonego miejsca i czasu, po przekroczeniu którego Achilles będzie już z przodu. Mianowicie, jeśli przyjmiemy, że Achilles jest k razy szybszy od żółwia (oczywiście, $k > 1$), to gdy Achilles pokona pierwszy odcinek a, to żółw w tym czasie przesunie się o odcinek $b = \frac{a}{k}$; gdy Achilles pokona drugi odcinek $b = \frac{a}{k}$, to żółw przesunie się o $c = \frac{b}{k} = \frac{a}{k^2}$ itd. Suma nieskończona pokonywanych odcinków nie jest nieskończona, gdyż, jak wiemy,

$$a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots = a\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots\right) = a\frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = a\frac{k}{k-1}.$$

Podobnie rozumujemy z czasem. Jeśli Achilles pokona pierwszy odcinek a w czasie t, to czas pokonania wszystkich odcinków wyniesie $t\frac{k}{k-1}$. Gdy przyjmiemy, że np. $k = 2$, tzn. Achilles jest dwa razy szybszy od żółwia, to rzeczywiście żółw będzie z przodu do punktu odległego od startu o $2a$ i do czasu $2t$, a nie – jak twierdzi Zenon z Elei – do dowolnego punktu i do dowolnego czasu.