Liczby Catalana

Włodzimierz BIELIŃSKI, Krzysztof PAROL

Liczbą Catalana c_n nazwiemy liczbę różnych rozmieszczeń nawiasów w iloczynie $x_1x_2\ldots x_n$, przy założeniu, że nie ma zbędnych nawiasów, a kolejność wykonywania działań jest określona w sposób jednoznaczny. Takie rozmieszczenie nawiasów będziemy nazywali *prawidłowym*. Łatwo zauważyć, że $c_1 = c_2 = 1$ (żadne nawiasy nie są potrzebne). Zauważmy też, że dla $n > 2$ nasze wyrażenie musi być postaci fg, gdzie f i g oznaczają odpowiednio iloczyny początkowych oraz końcowych zmiennych z wyznaczoną kolejnością wykonywania mnożenia. Przez k oznaczmy liczbę zmiennych w wyrażeniu f. Wtedy g składa się z $n-k$ zmiennych. Nietrudno stwierdzić, że dla ustalonego k liczba wyrażeń tego typu jest równa c_kc_{n-k} (musimy prawidłowo rozmieścić nawiasy w każdym z wyrażeń f i g). Liczba zmiennych w f może się zmieniać od 1 do $n-1$. Możemy więc napisać równanie rekurencyjne

Prawidłowymi rozmieszczeniami nawiasów są np. $(x_1x_2)(x_3x_4)$ i $(x_1(x_2x_3))x_4$, nie są zaś następujące: $(x_1x_2x_3)x_4$ i $x_1(((x_2x_3))x_4)$

(1) $$c_n = c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \cdots + c_{n-1}c_1\,.$$

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć dowolną liczbę Catalana.

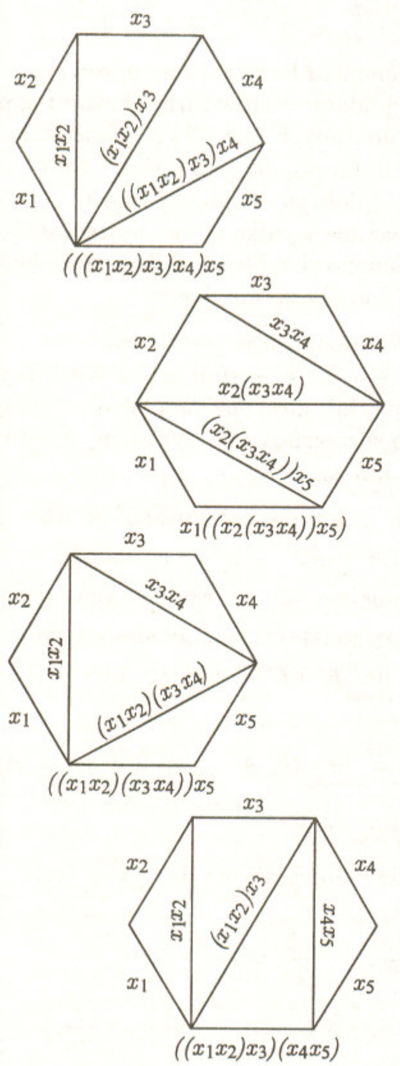
Dla dużych wartości n korzystanie z rekurencyjnego wzoru (1) jest jednak trochę kłopotliwe. Nierekurencyjny wzór na liczbę c_n można znaleźć wykorzystując teorię funkcji tworzących (Czytelnik może dowiedzieć się szczegółów z artykułu W. Bielińskiego „Co to są funkcje tworzące?", *Delta* 7/1996).

W *Delcie* 10/1995 pisaliśmy o kolejkach do kasy kina, w którym bilety kosztują 5 zł. Powiemy, że kolejka jest typu (p,d), jeśli znajduje się w niej p osób z pięciozłotówkami i d osób z dziesięciozłotówkami. Kolejkę typu (p,d) nazwiemy *dobrą*, jeśli nie zatrzyma się podczas sprzedaży biletów (dla każdego i na pierwszych i miejscach kolejki liczba osób z dziesięciozłotówkami nie przekracza liczby osób z pięciozłotówkami). Udowodniliśmy wtedy, że liczba $K(p,d)$ wszystkich dobrych kolejek typu (p,d) wyraża się wzorem $K(p,d) = \frac{p-d+1}{p+1}\binom{p+d}{p}$.

Rozważmy teraz dowolną dobrą kolejkę typu (k,k). Dodajmy na jej początek osobę z pięciozłotówką. Na przykład, dla $k=2$ z kolejki postaci $x*x*$ otrzymamy kolejkę $xx*x*$ (x oznacza osobę z pięciozłotówką, $*$ – osobę z dziesięciozłotówką). Oznaczenia nie są tu przypadkowe. Potraktujmy tak otrzymaną kolejkę jako wyrażenie zapisane w odwrotnej notacji polskiej (ONP), wynalezionej przez słynnego polskiego logika Jana Łukasiewicza. ONP polega na tym, że najpierw podajemy argumenty operacji, a później jej symbol (np. $2*3$ to w odwrotnej notacji polskiej $2\,3\,*$, $(2*3)*4$ to $2\,3\,*\,4\,*$, a $2*(3*4)$ to $2\,3\,4\,*\,*$). Zauważmy, że dla różnych dobrych kolejek typu (k,k) otrzymamy różne napisy w ONP, a co się z tym wiąże, różne prawidłowe rozmieszczenia nawiasów w iloczynie $k+1$ liczb. I odwrotnie. Stąd wnioskujemy, że $c_n = K(n-1,n-1)$, czyli

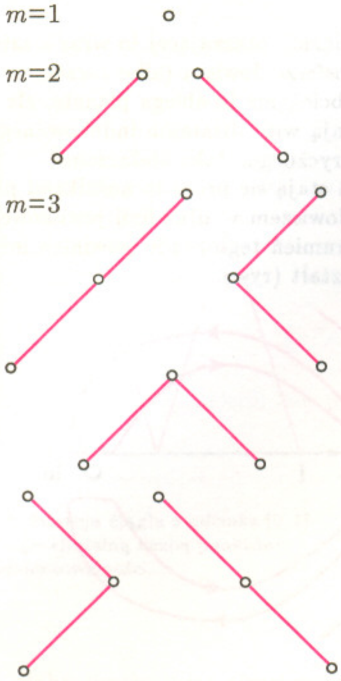
$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

(bardzo prosty wzór!). Podamy teraz kilka na pozór odległych problemów, w których pojawiają się liczby Catalana.



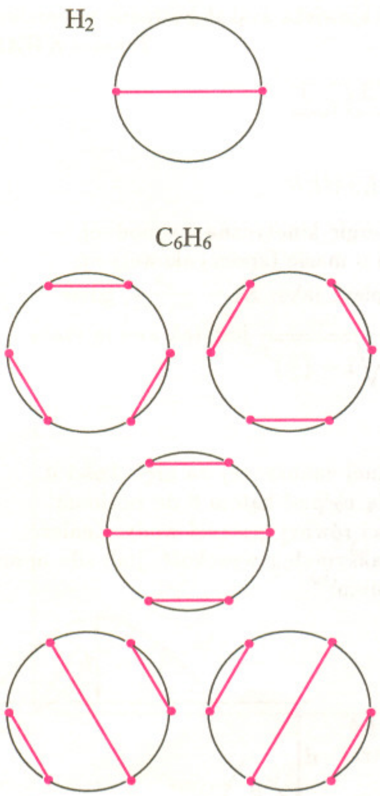
Rys. 1

1. Znajdziemy liczbę podziałów $(n+1)$-kąta wypukłego na trójkąty za pomocą $n-2$ nieprzecinających się przekątnych. Przyporządkujmy kolejnym bokom wielokąta etykiety $x_1, \ldots, x_n$ (ostatniego boku nie etykietujemy). Przekątnym wielokąta oraz ostatniemu bokowi przypiszmy wyrażenia zgodnie z następującą regułą: jeśli α oraz β są przypisane dwóm bokom pewnego trójkąta, to trzeciemu bokowi przyporządkujemy wyrażenie $(\alpha)(\beta)$, $\alpha(\beta)$, lub $(\alpha)\beta$ – w zależności od tego, czy α (odpowiednio β) jest jedną z etykiet x_i (nie stawiamy wtedy nawiasu), czy też dłuższym wyrażeniem (stawiamy nawias). Postępując w ten sposób przypiszemy ostatniemu bokowi pewne (prawidłowe) rozmieszczenie nawiasów w iloczynie $x_1x_2\ldots x_n$. W dodatku ta odpowiedniość między rozmieszczeniami $n-2$ nieprzecinających się przekątnych a prawidłowymi rozmieszczeniami nawiasów w iloczynie n symboli jest, jak można wykazać, wzajemnie jednoznaczna. Zatem szukana liczba podziałów jest równa c_n.



Rys. 2

Czytelnik bez trudu rozwiąże teraz (o ile do tej pory tego nie zrobił) zadanie o harcerzach z artykułu o kolejkach (patrz *Delta* 10/1995).



Rys. 3

2. Powróćmy na chwilę do kolejek typu (n, n). Z każdą taką kolejką możemy związać pewną ścieżkę w kartezjańskim układzie współrzędnych, zaczynającą się w punkcie $(0,0)$ i kończącą się w punkcie (n, n). Mianowicie, jeśli do kasy przychodzi osoba z pięciozłotówką, poruszamy się o jednostkę w kierunku osi OX, jeśli zaś osoba z dziesięciozłotówką – o jednostkę w kierunku osi OY. Łatwo zauważyć, że aby kolejka była dobra, potrzeba i wystarcza, by utworzona w ten sposób ścieżka nie miała punktów powyżej prostej $y = x$ (wtedy do kasy przyszłoby w pewnym momencie więcej osób z dziesięciozłotówkami). Widzimy więc, że liczba zdefiniowanych wyżej ścieżek jest równa c_{n+1}.

Zauważmy, że dla każdej takiej ścieżki zbiór leżących na niej punktów kratowych możemy traktować jako wykres pewnej funkcji f ze zbioru $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ w ten sam zbiór X. Oczywiście, f musi być funkcją niemalejącą spełniającą warunek $f(i) \leq i$ dla każdego $i \in X$ (to kolejna interpretacja liczb Catalana).

Z powyższych rozważań wynika wzór

$$c_{n+1} = \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \; \sum_{i_{n-2}=n-2}^{i_{n-1}} \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3} \; \sum_{i_1=1}^{i_2} 1 .$$

3. Rozpatrzmy następujący problem. Mamy $2n$ różnych liczb rzeczywistych; na ile sposobów można je podzielić na dwa ściśle rosnące ciągi $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ spełniające warunek $a_i < b_i$?

Każdej liczbie z ciągu a przyporządkujmy pięciozłotówkę, każdej liczbie z ciągu b – dziesięciozłotówkę. Następnie uporządkujmy te liczby. Zgodnie z warunkami zadania otrzymamy dobrą kolejkę typu (n, n). Dla różnych ciągów a i b otrzymamy różne dobre kolejki. Odwrotnie, ustawmy wszystkie liczby w ciąg rosnący. Każdej liczbie przyporządkujmy banknot dziesięciozłotowy lub monetę pięciozłotową tak, aby otrzymać dobrą kolejkę typu (n, n). Teraz liczby, którym przyporządkowane są pięciozłotówki, tworzą ciąg a, pozostałe zaś ciąg b. Znowu łatwo zauważyć, że tak utworzone ciągi spełniają warunki zadania. Co więcej, dla różnych dobrych kolejek otrzymujemy różne pary ciągów (a, b). Liczba opisanych wyżej podziałów jest więc równa c_{n+1}.

4. Drzewem binarnym o n wierzchołkach nazywamy drzewo puste, gdy $n = 0$, lub trójkę (L, r, P), gdzie r jest wyróżnionym wierzchołkiem zwanym korzeniem drzewa, a L i P są drzewami binarnymi (odpowiednio lewym i prawym drzewem binarnym) łączącymi się w wierzchołku r – rysunek 2. W L oraz P jest w sumie $n - 1$ wierzchołków. Przez t_n oznaczmy liczbę różnych drzew binarnych o n wierzchołkach. Przyjmiemy $t_0 = 1$. Łatwo zauważyć, że $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Rozważmy dowolne drzewo binarne o n wierzchołkach. Jeśli jego lewe poddrzewo zawiera i wierzchołków, to prawe poddrzewo ma $n - i - 1$ wierzchołków. Liczba wierzchołków w lewym poddrzewie może być równa 0, 1, ..., $n - 1$. Mamy więc zależność rekurencyjną

(2) $$t_n = t_0 t_{n-1} + t_1 t_{n-2} + \cdots + t_{n-1} t_0 .$$

Jest ona identyczna z zależnością (1) (żeby się o tym przekonać, wystarczy w (1) zastąpić n przez $n + 1$). Mamy $t_0 = c_1$, $t_1 = c_2$. Stąd $t_n = c_{n+1}$ dla dowolnego n.

5. Liczby Catalana występują również w pewnych zagadnieniach w chemii kwantowej. Rozpatrzmy mianowicie układ $2n$ takich atomów, że każdy z nich ma wolny jeden elektron walencyjny. Między atomami tworzą się wiązania – atomy łączą się w pary. Najtrwalsza konfiguracja odpowiada maksymalnej liczbie wiązań. Powstaje pytanie: ile jest różnych takich konfiguracji? Okazuje się, że problem można, w uproszczeniu, zobrazować w następujący sposób: na okręgu umieszczamy $2n$ punktów (orbitale) i łączymy je n nieprzecinającymi się odcinkami (wiązania). Czytelnikowi pozostawiamy dowód faktu, że szukana liczba jest równa c_{n+1}. Dla przykładu pokazane zostały cząsteczki wodoru oraz benzenu.