wadliwych matematycznie, matematycznych tworów stworzonych w przypływie rozpaczy przez fizyków, jak np. całki Feynmana.

Daleko gorzej jest tam, gdzie dyscypliny domagające się matematyki są zdecydowanie w możliwości matematyczne uboższe. W ekonometrii, psychometrii, socjometrii itp. króluje krzywa Gaussa, jako *panaceum* na każdą chorobę.

Lęgną się też obłędnie rozbudzone nadzieje, że oto zjawi się cud i coś, znienacka, przyniesione z matematyki dokona zasadniczego przełomu. Aktualnie takim – z całą pewnością (mówię w swoim imieniu) – czystym nadużyciem jest czynienie nadziei chemikom na przełom, jakiego w ich dyscyplinie może dokonać teoria grafów (jest już parę doktoratów opartych na tej nadziei, patrz opinia Comte'a na poprzedniej stronie). W latach sześćdziesiątych wszystko (kryzysy ekonomiczne, zawały serca, załamania psychiczne, stresy zbiorowe itp.) miało zostać uzdrowione za pomocą teorii katastrof René Thoma. Dziś podobną rolę pełnią fraktale, czyli – w dobrym przybliżeniu – figury samopodobne (tj. takie, że oglądane w dużym powiększeniu prezentują naszym oczom ten sam widok, jak bez tego powiększenia); nikt nie wie, dlaczego tak miałoby być, ale czemu nie?

Społeczną pozycję matematyki obniża jeszcze jej własne dziecko – informatyka. Od chwili odkrycia tranzystora (1949 r.) jej podstawowe narzędzie – komputer – może zdjąć z pleców matki praktycznie wszystkie kłopoty obliczeniowe. W oczach wielu nic więcej w matematyce nie ma – nic więc dla niej nie pozostaje.

Mówiąc o konkretach. Dziś w szkole, najlepszym zwierciadle opinii społecznej, matematyka z pierwszego miejsca spadła, jeśli chodzi o prestiż, w najlepszym razie na trzecie (za angielskim i informatyką). Na studiach jest w środku drugiej dziesiątki (dochodzi prawo, zarządzanie, przeróżne marketingi itp.). Zjawisko to matematyków boli, wielu ludzi – szczególnie starszych – przeraża. Należy jednak pamiętać o jednym: matematyka w centrum zainteresowania społecznego nie znajdowała się prawie nigdy – trzy stulecia Starożytnej Grecji, dwa stulecia dominacji arabskiej, ostatnie trzy stulecia Europy. I to wszystko. Zapewne musi teraz poczekać, aż z jej krystalicznej głębi wyłoni się znów jakaś propozycja, która pociągnie za sobą rzesze fanów. Bo bieżące rachowanie może spokojnie zostawić komputerom.

Jeszcze o Achillesie i żółwiu. Czy Zenon z Elei miał rację?

Tadeusz KRASIŃSKI

Jednym z wielu problemów, które dotarły do nas ze starożytności, są paradoksy Zenona z Elei (żył prawdopodobnie w latach 490–430 p.n.e.). Był on uczniem wybitnego filozofa starożytności Parmenidesa, twórcy szkoły filozoficznej eleatów. Zarówno nauczyciel, jak i jego uczeń wyznawali zasadę filozoficzną, że byt jest jeden, wieczny, nieruchomy, niezmienny i niepodzielny. Doprowadziło ich do tego poglądu czysto dedukcyjne rozumowanie wyprowadzone z jednej podstawowej przesłanki, że byt jest jeden, a niebytu nie ma. Poznanie zmysłowe, które stało w jawnej sprzeczności z ich poglądami, uważali za złudne, niepewne i niewiarygodne. Aby przekonać o tym przeciwników swoich poglądów, Zenon z Elei podał wiele rozumowań, w których wykazywał, że w pojęciach wszelkiej zmiany (np. ruchu) lub mnogości tkwią sprzeczności. Rozumowania te, zwane w starożytności aporiami, znane są pod nazwą paradoksów Zenona. Najbardziej znanymi są paradoksy Zenona o ruchu: Achillesa i żółwia, dychotomii, lecącej strzały oraz stadionu, mające wykazywać, że ruch jest niemożliwy, gdyż zawiera w sobie sprzeczności.

Zajmiemy się jednym z nich, a mianowicie paradoksem Achillesa i żółwia, na który spojrzymy trochę inaczej niż robiono to dotychczas. Teza Zenona z Elei była następująca: szybkonogi Achilles nigdy nie dogoni żółwia, o ile żółw wyruszy do biegu wcześniej (oczywiście, zakładamy, że Achilles biegnie szybciej od żółwia). Wniosek ten wyciągał na podstawie następującego rozumowania: jeśli żółw wyruszy do biegu wcześniej, to w momencie startu Achillesa pokona pewną drogę, powiedzmy a. Gdy drogę a przebędzie Achilles, to żółw w tym czasie przesunie się kawałek dalej, powiedzmy o b. Gdy z kolei Achilles przebędzie odcinek b, to żółw przesunie się o odcinek c itd. Zatem, jak wnioskuje Zenon z Elei, Achilles nigdy nie dogoni żółwia, gdyż to rozumowanie możemy powtórzyć nieskończenie wiele razy. Ponieważ w opinii eleatów jedynie czystym dedukcyjnym rozumowaniem możemy dochodzić do prawdy (a takim było powyższe), więc potoczne doświadczenie ruchu jest złudne. W konsekwencji, ruch nie istnieje.

Paradoks ten wyjaśniano używając do tego elementów teorii szeregów. Mianowicie, nie można z powyższego rozumowania wyciągnąć wniosku, że **nigdy** Achilles nie dogoni żółwia. Prostym rozumowaniem wykażemy, że rzeczywiście Achilles nie dogoni żółwia, ale tylko do określonego miejsca i czasu, po przekroczeniu którego Achilles będzie już z przodu. Mianowicie, jeśli przyjmiemy, że Achilles jest k razy szybszy od żółwia (oczywiście, $k > 1$), to gdy Achilles pokona pierwszy odcinek a, to żółw w tym czasie przesunie się o odcinek $b = \frac{a}{k}$; gdy Achilles pokona drugi odcinek $b = \frac{a}{k}$, to żółw przesunie się o $c = \frac{b}{k} = \frac{a}{k^2}$ itd. Suma nieskończona pokonywanych odcinków nie jest nieskończona, gdyż, jak wiemy,

$$a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots = a(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \ldots) = a\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = a\frac{k}{k-1}.$$

Podobnie rozumujemy z czasem. Jeśli Achilles pokona pierwszy odcinek a w czasie t, to czas pokonania wszystkich odcinków wyniesie $t\frac{k}{k-1}$. Gdy przyjmiemy, że np. $k = 2$, tzn. Achilles jest dwa razy szybszy od żółwia, to rzeczywiście żółw będzie z przodu do punktu odległego od startu o $2a$ i do czasu $2t$, a nie – jak twierdzi Zenon z Elei – do dowolnego punktu i do dowolnego czasu.

Wyjaśnienie to jest powszechnie przyjmowane i nie budzi żadnych wątpliwości (oprócz filozoficznych – jak to jest możliwe pokonanie nieskończenie wielu odcinków w skończonym czasie). Ale spójrzmy na to z innej strony. W paradoksie Zenona jest tylko jedno ogólne założenie, że Achilles biegnie szybciej od żółwia, lecz nie jest podane, jaki jest wzajemny stosunek ich prędkości. Powyżej przyjęliśmy, że prędkości ich są stałe i nie zmieniają się w czasie. A co będzie, gdy będą oni mieli prędkości zmienne? Okazuje się, że wtedy teoria szeregów nieskończonych daje nam zaskakującą (można powiedzieć paradoksalną) odpowiedź. Można tak dobrać prędkości Achillesa i żółwia (oczywiście, będzie spełnione podstawowe założenie, że w każdym momencie prędkość Achilles jest większa od prędkości żółwia), że Achilles **nigdy** (ani w czasie, ani w przestrzeni) nie dogoni żółwia. Przyjmijmy mianowicie, że prędkość Achillesa jest stała, żółwia zaś z odcinka na odcinek nieznacznie się zwiększa (również można tak dobrać prędkości, że obie będą się zmniejszać) w następujący sposób: niech żółw pokona odcinek o długości 1 i wtedy wystartuje Achilles. Niech prędkości ich będą w takiej relacji: gdy Achilles pokona ten odcinek w czasie 1 s, to żółw w tym czasie odcinek o długości $\frac{1}{2}$. Następnie, gdy Achilles pokona odcinek o długości $\frac{1}{2}$ (w czasie $\frac{1}{2}$ s), to żółw odcinek o długości $\frac{1}{3}$ itd. Każdy kolejny odcinek (o długości $\frac{1}{n}$) Achilles pokonuje w czasie $\frac{1}{n}$ s, żółw zaś w tym czasie odcinek o długości $\frac{1}{n+1}$. Oczywiście, ogólne założenie o prędkościach jest spełnione. Spróbujmy obliczyć odcinek, jaki pokonają oni w tym przypadku. Podobnie jak w pierwszym rozumowaniu, żółw będzie z przodu aż do punktu równego sumie szeregu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ (z definicji sumy szeregu jest to granica ciągu (s_n) sum częściowych tego szeregu, gdzie $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$).

Okazuje się, że suma tego szeregu, zwanego szeregiem harmonicznym, równa jest nieskończoności (na zakończenie artykułu podamy elementarny dowód tego faktu). Wniosek z tego jest następujący: przy dobranych powyżej prędkościach, dla dowolnie długiego odcinka, Achilles i żółw dobiegną do jego końca i żółw nadal będzie z przodu. Zatem przy odpowiednio dobranych prędkościach wniosek Zenona z Elei jest uzasadniony. Chociaż nie wynika z tego sprzeczność z pojęciem ruchu, to musimy przyznać rację Zenonowi z Elei: Achilles może biec szybciej od żółwia w każdym momencie ruchu i nigdy go nie dogoni!

Podamy teraz dowód faktu, że suma szeregu harmonicznego jest równa nieskończoności. Ponieważ ciąg (s_n), $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, sum częściowych tego szeregu jest rosnący, więc ma granicę, skończoną lub nieskończoną. Wykluczymy pierwszą możliwość poprzez doprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy zatem, że jest zbieżny do granicy skończonej A, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$.

Wówczas szeregi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$ i $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$ są również zbieżne, bo ich sumy częściowe $b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}$ i $c_n = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ są rosnące (tzn. $b_n \le b_{n+1}$, $c_n \le c_{n+1}$ dla każdego n) i mniejsze od sum częściowych szeregu harmonicznego (tzn. $b_n \le s_n$ i $c_n \le s_n$ dla każdego n). Oznaczmy sumy tych szeregów odpowiednio przez B i C, tzn. $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $C = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Liczby A, B i C związane są równościami:

1. $B + C = A$ (bo $B + C = \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n + c_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = A$),

2. $2B = A$ (bo $2B = 2 \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2b_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$).

Z obu tych równości wynika, że $B = C$. Ale dla sum częściowych b_n i c_n tych szeregów mamy:

$$c_n - b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \ge \frac{1}{2}.$$

Zatem w granicy $C - B \ge \frac{1}{2}$, co przeczy równości $C = B$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.