Istnienie i nieistnienie w matematyce

Wiktor BARTOL

Filozof i logik angielski Bertrand Russell określił matematykę jako dziedzinę, w której „nie wiadomo, o czym się mówi i czy to, co się mówi, jest prawdą". Ten zgrabny opis miał wyrażać – w skrócie właściwym aforyzmom – fakt, iż matematyka jest nauką abstrakcyjną, niezależną od rzeczywistości i zajmującą się wyprowadzaniem (dowodzeniem) twierdzeń na podstawie ściśle określonego sposobu wnioskowania, nie interesuje jej natomiast związek tych twierdzeń z tzw. życiem. Przemilczmy tu, na razie – bardzo ciekawe! – pytania i wątpliwości, jakie może rodzić takie postawienie sprawy (zauważmy tylko, że bez matematyki nie dałoby się zbudować porządnego mostu ani rakiety kosmicznej). Poprzestańmy tu na stwierdzeniu, że, jak w każdym aforyzmie, jest w określeniu Russella część prawdy. Mianowicie, kryterium prawdy w matematyce nie przewiduje potwierdzania hipotez w drodze jakichkolwiek obserwacji.

Cóż zatem może w ogóle oznaczać pytanie o istnienie jakiegoś obiektu matematycznego? Jakie kryterium należy przyjąć, by odpowiedzieć na pytanie o istnienie np. zbioru nieskończonego?

Jeśli matematyka jest nauką niezależną od zjawisk fizycznych, biologicznych itp., a jej obiekty są tworami czysto abstrakcyjnymi, to problem istnienia musi znajdować rozstrzygnięcie w niej samej. I rzeczywiście. Matematycy prawie powszechnie uznają, że istnieje wszystko to, co ma tę własność, że założenie o jego istnieniu nie prowadzi do sprzeczności. Mówiąc nieco dokładniej, owa własność polega na tym, że jeśli do twierdzeń określonej teorii matematycznej dołączymy zdanie mówiące o istnieniu pewnego obiektu, to możemy uznać owo istnienie, jeśli z tak rozszerzonej teorii nie da się wyprowadzić dwóch twierdzeń, z których każde jest negacją drugiego. Inaczej mówiąc, gdy założenie o istnieniu obiektu nie prowadzi do sprzeczności z daną teorią. Na przykład, gwarancją niesprzeczności jest dowód istnienia postulowanego obiektu.

Zależność między niesprzecznością a istnieniem wyraża twierdzenie Gödla z 1930 roku, które stwierdza, że każdy niesprzeczny zbiór zdań ma model przeliczalny, czyli istnieje struktura, „realizująca" każde zdanie z niesprzecznego zbioru. Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: jeśli istnieje struktura, która realizuje każde zdanie z jakiegoś zbioru zdań, to ów zbiór jest niesprzeczny.

Poszukajmy ilustracji opisanego tu podejścia. Zapewne większość Czytelników słyszała lub czytała (np. w *Delcie*) o geometriach nieeuklidesowych. Geometrie te zrodziły się z prób sprawdzenia, czy tzw. V postulat Euklidesa nie wynika aby z pozostałych czterech. Okazało się, że przyjęcie (zamiast V postulatu) założenia innego niż to, które przyjął Euklides, daje całkiem spójną, całkowicie pozbawioną sprzeczności teorię. Jaką? To zależy od postaci owego dodatkowego założenia. Można w ten sposób otrzymać teorię, w której istnieje nieskończenie wiele prostych przechodzących przez punkt nie leżący na danej prostej i równoległych do niej, a można (zmieniając nieco bardziej założenia) otrzymać i taką, w której przez punkt zewnętrzny do prostej nie przechodzi żadna prosta równoległa do niej. Stąd wniosek, stanowiący niezbywalny dorobek matematyki: istnieją geometrie nieeuklidesowe. I – przy okazji – wniosek drugi: istnienie lub nieistnienie ma sens tylko na gruncie wyraźnie określonego systemu. To, co istnieje w jednym (przy pewnych założeniach), może nie istnieć w innym (przy odmiennych założeniach).

Rozwiązanie zadania F 440. Ponieważ średnia gęstość pocisku jest równa gęstości wody, siła wyporu w wodzie równoważy jego ciężar. Z tego powodu pocisk porusza się w wodzie po linii prostej. W powietrzu pocisk porusza się po paraboli. Zasięg i wysokość toru dane są wzorami

$$R = d\operatorname{ctg}\theta + \frac{v_1^2 \sin 2\theta}{g},$$

$$h = \frac{v_1^2 \sin^2\theta}{2g},$$

gdzie v_1 jest prędkością, z jaką pocisk wylatuje z wody. Musimy tę prędkość obliczyć. Równanie ruchu pocisku w wodzie ma postać

$$m\frac{dv}{dt} = -cv$$

w przypadku (a)
oraz

$$m\frac{dv}{dt} = -bv^2$$

w przypadku (b).

Zapiszmy przyspieszenie jako:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

gdzie s jest drogą przebytą przez pocisk.

W przypadku (a) mamy

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{c}{m}.$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy

$$v_1 = v_0 - \frac{cd}{m\sin\theta}.$$

W przypadku (b) otrzymujemy

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{b}{m}v.$$

Rozwiązując to równanie dostajemy

$$v_1 = v_0 \cdot e^{-\frac{bd}{m\sin\theta}}.$$

A jak stwierdzić, że coś, jakiś pomyślany obiekt, nie istnieje? Z tego, co powiedzieliśmy do tej pory, wynika to jasno: należy wykazać, że założenie o istnieniu tego obiektu prowadzi do sprzeczności. Być może czytając w *Delcie* 4/1996 artykuły o nieistniejących obiektach matematycznych, zauważyliście, że wszystkie dowody nieistnienia zaczynają się od zdania w rodzaju: „Przypuśćmy, że (tu nazwa obiektu) istnieje...", a kończą stwierdzeniem sprzeczności, do której to założenie doprowadziło. Bywa zresztą i tak, że w podobny sposób dowodzi się istnienia: „Przypuśćmy, że (i tu znów nazwa odpowiedniego obiektu) nie istnieje...". Jeśli z tego założenia da się wyprowadzić sprzeczność, pozostaje przyjąć, że obiekt istnieje.

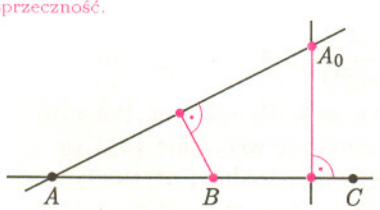
Dla pełności obrazu należy dodać, że nie zawsze i nie wszyscy matematycy skłonni są przyjąć taki punkt widzenia. Mniej więcej 60–70 lat temu zrodził się wśród matematyków kierunek myślenia zwany *intuicjonizmem*, odrzucający dowody istnienia nie wskazujące wyraźnie na obiekt, którego istnienie jest postulowane. O istnieniu można zatem mówić tylko wtedy, gdy można „pokazać palcem", czyli skonstruować, odpowiedni obiekt. Jeśli nawet można zrozumieć taką tęsknotę do sprawdzenia wszystkiego przez ogląd bezpośredni, filozofia intuicjonistów – i szerzej: konstruktywistów – nie przyjęła się w matematyce. Z prostego powodu: wymagałaby odrzucenia ogromnej części matematyki, która przecież nie najgorzej dawała i daje sobie radę nie tylko ze sobą, ale i z rzeczywistością. Co prawda, ostatnio rzeczywistość nieco się skomplikowała i np. teoretycy informatyki przykładają bardzo duże znaczenie do konstruowalności różnych obiektów, ale to już jest specyfika tej dziedziny.

Tak więc mówiąc w skrócie: istnienie to niesprzeczność, nieistnienie to sprzeczność. Wydawałoby się zatem, że matematyka ma z tzw. życiem niewiele wspólnego i sama siebie rozlicza ze swoich pojęć. Czy rzeczywiście? Wystarczy rozejrzeć się wokół siebie. Co byśmy zobaczyli, gdyby z naszego otoczenia zniknęły wszystkie obiekty, przy których tworzeniu człowiek wykorzystał pojęcia, prawa i metody matematyki? A przecież mosty (na ogół) stoją, rakiety kosmiczne (na ogół) lecą, a niekiedy nawet planety znajdują się w miejscach, wskazanych przez wyniki obliczeń matematycznych. Wyjaśnienie tego frapującego stanu rzeczy zależy w dużej mierze od przyjmowanych założeń filozoficznych (choćby od odpowiedzi na pytanie, czy matematycy odkrywają nowe pojęcia i prawa, czy je wymyślają?). Tu poprzestańmy na ogólnym stwierdzeniu, że matematyka powstawała i rozwijała się jako język opisu rzeczywistości, język, który ukształtował swoje własne reguły i stosuje swoiste metody weryfikowania formułowanych w nim zdań. Historia tego języka sprawia, że jest on skutecznym narzędziem działania w świecie rzeczywistym; jego reguły i metody nadają twierdzeniom charakter prawd niezależnych od tego świata.

Aha, warto może na koniec powiedzieć jeszcze i to: od 1931 roku wiadomo (znów dzięki Gödlowi), że niesprzeczności żadnej niezbyt trywialnej teorii nie da się udowodnić jej własnymi narzędziami. Tak więc np. do dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych (zakładającej istnienie takich liczb) trzeba się odwołać do założenia o niesprzeczności teorii mnogości, jej niesprzeczności można dowodzić na gruncie innej teorii... Wynikiem takiego postępowania może być zatem tylko tzw. względna niesprzeczność danej teorii, zależna od niesprzeczności teorii wyższej. A to znaczy – jeśli o istnieniu w matematyce mowa – że absolutna niesprzeczność **nie istnieje**! W takim razie, czy istnieje matematyka???

Rozwiązanie zadania M 790. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Oznaczmy przez X zbiór wszystkich par postaci (p, A), gdzie p jest prostą przechodzącą przez pewne dwa punkty zbioru S, A zaś punktem zbioru S nie należącym do p. Niech funkcja $f : X \to (0, +\infty)$ przyporządkowuje parze (p, A) odległość A od p. Ponieważ zbiór X jest skończony, więc funkcja f osiąga swe (dodatnie) minimum m w pewnym punkcie $(p_0, A_0) \in X$.

Zgodnie z założeniem o S, na prostej p_0 leżą przynajmniej trzy różne punkty A, B i C zbioru S. Przynajmniej dwa z nich – bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że są to A i B – leżą po tej samej stronie prostej l przechodzącej przez A_0 i prostopadłej do p. Bez zmniejszenia ogólności przyjmijmy także, że odległość B od l jest mniejsza, niż odległość A od l. Wtedy jednak odległość B od prostej AA_0 jest mniejsza od m, a to jest sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 791. Niech m będzie taką liczbą całkowitą, że $mp = xy$. Przypuśćmy, że p nie dzieli x. Na mocy własności największego wspólnego dzielnika mamy wówczas

$$1 = \mathrm{NWD}(p, x) = ap + bx$$

dla pewnych a, b całkowitych. Mnożąc stronami przez y otrzymujemy

$$y = apy + bxy = p(ay + bm),$$

a więc p dzieli y.