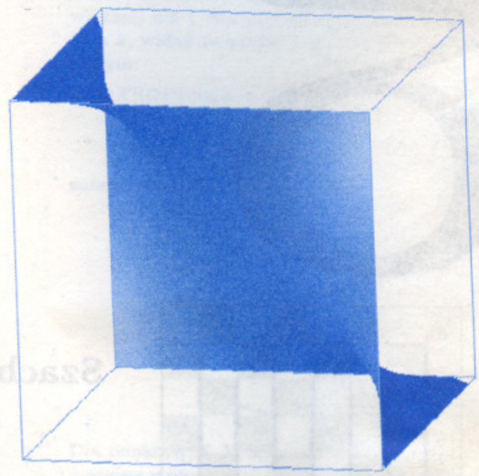
Periodyczne powierzchnie minimalne

Wojciech GÓŹDŹ i Robert HOŁYST

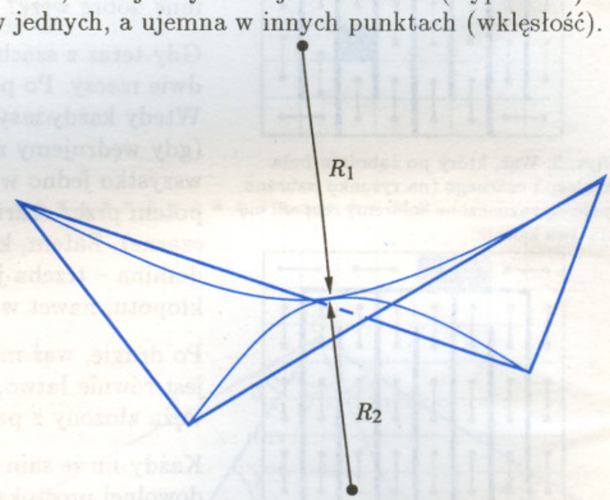
Czym są powierzchnie minimalne i jak je można utworzyć i zobaczyć? Na to pytanie odpowiedzieli matematycy i przyrodnicy w XVIII i XIX wieku. A oto przepis na prosty eksperyment, pokazujący powierzchnię minimalną, który może być wykonany przez każdego Czytelnika *Delty*:

Przygotuj roztwór mydła taki, abyś mógł zrobić z niego bańki mydlane. Następnie z drutu wykonaj ramkę o dowolnym kształcie. Ciekawszy efekt uzyskuje się, jeżeli ramka nie jest płaska. Zanurz ramkę w roztworze. Utworzy się na niej błonka mydlana. Błonka przyjmie taki kształt, przy którym ma najmniejsze z możliwych pole powierzchni. Wynika to z istnienia napięcia powierzchniowego i proporcjonalnej do niego energii powierzchniowej. Ponieważ każdy układ dąży do stanu, w którym energia jest minimalna (w tym przypadku energia swobodna), błonka mydlana przyjmie kształt odpowiadający najmniejszej energii, a w konsekwencji jak najmniejszemu – przy zadanym kształcie ramki – polu powierzchni. Dlatego powierzchnię utworzoną przez błonkę mydlaną na ramce nazywamy **powierzchnią minimalną**. Ogólnie, powierzchnia minimalna jest to powierzchnia o minimalnym, przy zadanych warunkach brzegowych, polu powierzchni. Opisany eksperyment jest nazwany eksperymentem Plateau; nazwa ta pochodzi od nazwiska przyrodnika, który zajmował się problemem napięcia powierzchniowego w XIX wieku. Opisał on w 1873 roku to doświadczenie w książce *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires* (*Statyka doświadczalna i teoretyczna płynów poddanych jedynie działaniu sił molekularnych*). James Clerk Maxwell w artykule zamieszczonym w Encyclopaedia Britannica podaje, że tego typu eksperymenty wykonał już Leonardo da Vinci kilkaset lat przed Plateau. Na rysunku 1 pokazana jest ramka o charakterystycznym kształcie wraz z powierzchnią, która powinna się na niej utworzyć po zanurzeniu w roztworze mydła. Jest to prosty element powierzchni D Schwarza, o której będzie mowa w dalszej części artykułu.

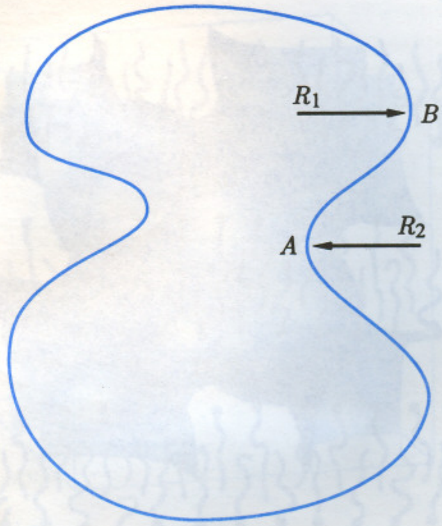
Matematycy znaleźli inny sposób opisu powierzchni minimalnych, niezależny od kształtu brzegu powierzchni. Laplace wykazał, że powierzchnia minimalna jest to taka powierzchnia, której średnia krzywizna w każdym punkcie jest równa zeru. Aby zrozumieć, jaki ma kształt powierzchnia minimalna w trójwymiarowej przestrzeni, wyobraźmy sobie siodło końskie (rys. 2). Siodło to ma dwa wygięcia, każde w przeciwną stronę. Jest ono w środkowym punkcie równocześnie wklęsłe i wypukłe. Taki punkt nazywany jest punktem siodłowym. Jak widać (rys. 2), z dwóch krzywizn $1/R_1$ i $1/R_2$ jedna jest dodatnia, a druga ujemna, tak, że średnia krzywizna zdefiniowana wzorem: $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ jest – dla $R_1 = -R_2$ – równa zeru (R_1 i R_2 są najmniejszym i największym promieniem krzywizny w danym punkcie powierzchni i nazywają się głównymi promieniami krzywizny). A więc powierzchnie minimalne mają zerową średnią krzywiznę w każdym punkcie, co oznacza, że składają się w całości z punktów siodłowych. (Powierzchnia zupełnie płaska ma także zerową krzywiznę w każdym punkcie i jest szczególnym przykładem powierzchni minimalnej.) Średnia krzywizna kuli o promieniu R jest równa $1/R$, a walca o promieniu r jest równa $1/2r$. Możemy zdefiniować wklęsłość i wypukłość poprzez znak krzywizny. Na rysunku 3 pokazana jest krzywa płaska, której krzywizna jest dodatnia (wypukłość) w jednych, a ujemna w innych punktach (wklęsłość).



Rys. 1. Prosty kształt ramki wraz z powierzchnią, która powinna się na niej utworzyć po zanurzeniu w roztworze mydła. Wszystkie kąty w tej ramce są proste i wszystkie długości boków są równe. Otrzymana powierzchnia jest 1/64 komórki elementarnej powierzchni D Schwarza (rys.7).



Rys. 2. Kształt powierzchni w pobliżu punktu siodłowego. Średnia krzywizna jest równa $H = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)$. W równaniu na H należy wziąć R_1 i R_2 z przeciwnymi znakami, ponieważ siodło jest wygięte w przeciwne strony (popatrz też na uproszczony rys. 3).

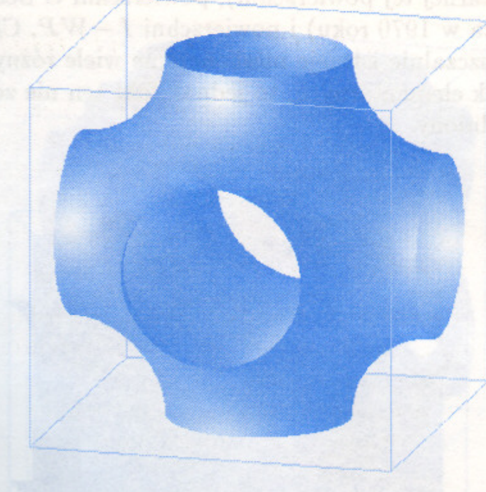


Rys. 3. Płaska krzywa z ujemną krzywizną w punkcie A i dodatnią w punkcie B. Znaku krzywizny można użyć do zdefiniowania wypukłości i wklęsłości.

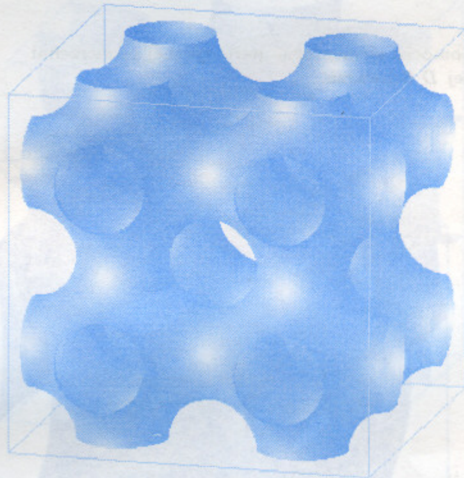
Matematycy poszli dalej. Jeden z nich (Schwarz) wykazał w 1865 r., że można wziąć proste kawałki powierzchni minimalnej i poskładać je tak, aby otrzymać periodyczne powierzchnie minimalne. Aby to zrozumieć, popatrzmy na rysunki 4–6. Na rysunku 4 pokazany jest prosty kawałek powierzchni minimalnej.

Rys. 4. Prosty element powierzchni minimalnej P Schwarza. Z ośmiu takich kawałków powierzchni sklejonych odpowiednio wzdłuż krawędzi otrzymamy rysunek 5.

Z ośmiu takich kawałków sklejonych wzdłuż jej krawędzi dostaniemy powierzchnię pokazaną na rysunku 5 (tzw. powierzchnia P Schwarza). Powierzchnia ta pokazana jest w sześcianie. Składając osiem takich sześcianów wzdłuż ścian dostaniemy rysunek 6. Powtarzając tę procedurę nieskończoną ilość razy można wypełnić tymi sześcianami całą przestrzeń. Tak otrzymana powierzchnia jest gładka, tzn. nie ma żadnych kantów ani załamań. Zwróćmy uwagę, że taką powierzchnię, która wypełnia całą przestrzeń, można otrzymać z elementu pokazanego na rysunku 5 przez wielokrotne przesuwanie

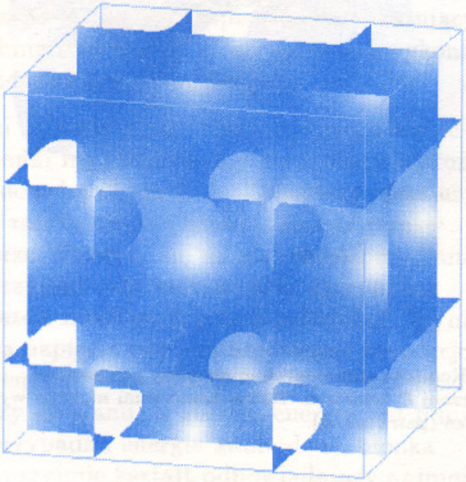


Rys. 5. Komórka elementarna minimalnej powierzchni periodycznej P Schwarza. Takimi komórkami możemy wypełnić całą przestrzeń (patrz rys. 6).

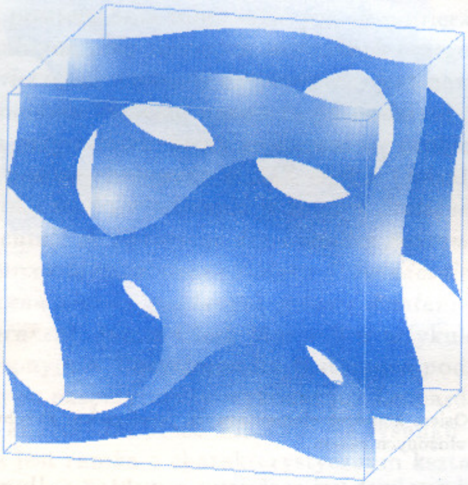


Rys. 6. Osiem komórek elementarnych powierzchni P Schwarza (rys. 5) złożonych razem.

go w kierunkach osi sześcianu o wektor o długości równej wielokrotności długości jego boku. Otrzymujemy w ten sposób periodyczną powierzchnię minimalną, a sześcian pokazany na rysunku 5 wraz z powierzchnią nazywamy komórką elementarną. Prosty element powierzchni, pokazany na rysunku 4, (od którego zaczęliśmy całą procedurę) można utworzyć według przepisu Plateau (podanego na początku) biorąc odpowiedni kształt ramki, tak by jej krawędzie odpowiadały brzegom tej powierzchni. Nie każdy prosty kawałek powierzchni minimalnej daje się tak złożyć, aby można z niego było utworzyć gładką, periodyczną powierzchnię minimalną. Matematycy, którzy badają ten problem od 130 lat, odkryli tylko 7 takich powierzchni o symetrii kubicznej, tj. takich, w których komórka elementarna ma kształt sześcianu. Na rysunkach 7, 8, 9 pokazane są komórki elementarne, kolejno, powierzchni D Schwarza (a na rysunku 1 widoczna jest 1/64 komórki elementarnej tej powierzchni), powierzchni G Schoena (odkryta w 1970 roku) i powierzchni $I-WP$. Choć przypuszczalnie istnieje nieskończenie wiele różnych komórek elementarnych, to jednak fakt ten nie został udowodniony.



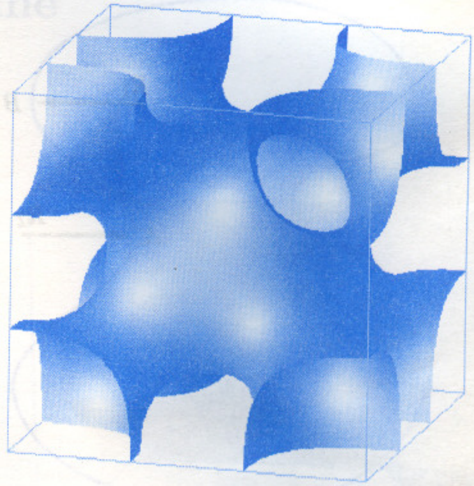
Rys. 7. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej D Schwarza.



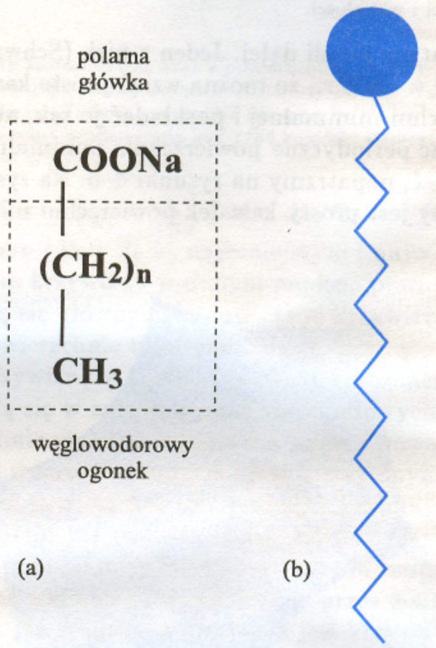
Rys. 8. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej G Schoena.

Czy periodyczne powierzchnie minimalne występują w przyrodzie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy najpierw omówić własności pewnych cząsteczek, które towarzyszą nam na co dzień: są nimi cząsteczki mydeł i detergentów. Cząsteczki takie składają się z dwóch części: polarnej „główki" (tzn. mającej moment dipolowy) i niepolarnego (węglowodorowego) „ogonka" (rys. 10).

Polarna główka jest wodolubna, a ogonek nie. Mówiąc w skrócie: polarna główka przyciąga cząsteczki wody, a ogonek je odpycha. Jeżeli w wodzie znajdują się cząsteczki brudu (najczęściej tłuszcze i węglowodory), to cząsteczki detergentu otaczają brud ogonkami, a główki kierują w stronę wody. Jest to podstawą



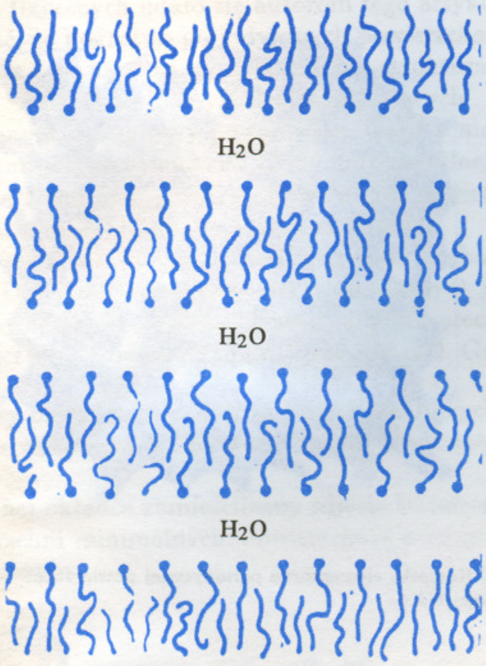
Rys. 9. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $I-WP$.



Rys. 10. Cząsteczka detergentu (detergenty nazywane są surfaktantami od słów angielskich: surface active agent – substancja powierzchniowo czynna) (a) wzór chemiczny (b) schematyczny rysunek cząsteczki.

procesu mycia czy prania. Brud jest zmywany przez detergent z tkaniny czy rąk dzięki temu, że detergent izolując brud od wody zmniejsza jego energię powierzchniową i odrywa go od tkaniny. Następnie brud i detergent są spłukiwane wraz z wodą. O ile energia powierzchniowa brudu i wody jest dużo większa niż energia powierzchniowa brudu i tkaniny, o tyle energia powierzchniowa detergentu i brudu jest dużo mniejsza i dlatego brud odrywa się od powierzchni i przyczepia do detergentu. Znów mamy do czynienia z zasadą minimum energii.

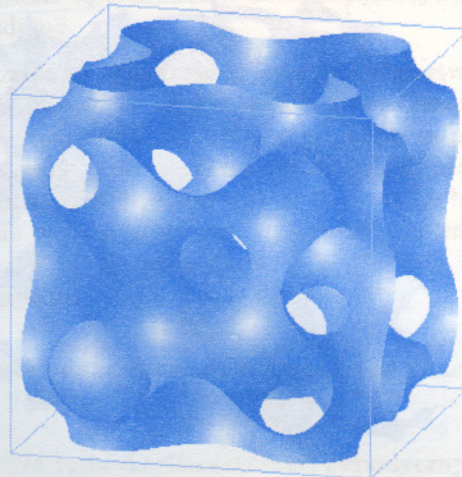
No dobrze, ale gdzie są te powierzchnie periodyczne? Jeżeli rozpuścimy cząsteczki detergentu w czystej wodzie, to mogą się one tak ułożyć w dwuwarstwy, aby ogonki były izolowane od wody (rys. 11).



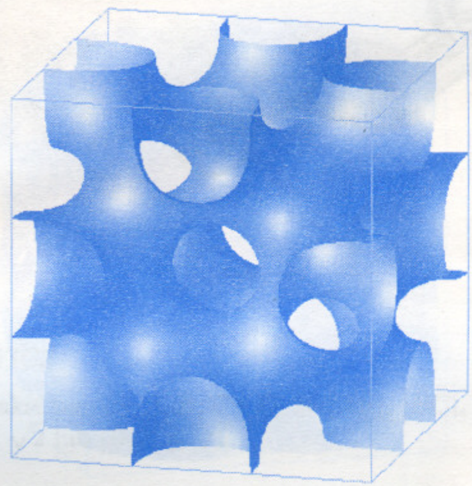
Rys. 11. Faza lamelarna złożona z dwuwarstw utworzonych przez cząsteczki detergentu w roztworze wodnym. Dwuwarstwy tworzą też powierzchnie periodyczne, takie jak pokazane na rysunkach 5, 7–9.

Na rysunku 11 pokazana jest struktura lamelarna (tzn. periodyczna w jednym kierunku) składająca się z płaskich dwuwarstw detergentu poprzedzielanych warstwami wody. Pod koniec lat 70. chemicy i fizycy odkryli, że dwuwarstwy detergentów tworzą nie tylko płaskie powierzchnie, takie jak pokazane na rysunku 11, ale również powierzchnie periodyczne, których komórki elementarne pokazane są na rysunkach 5, 7–9. Oczywiście, eksperymenty te nie przesądzają o tym, czy otrzymane powierzchnie są minimalne. Można sobie wyobrazić periodyczne powierzchnie, które choć pozornie wyglądają jak powierzchnie minimalne, to jednak minimalne nie są. Zawsze bowiem można powierzchnię trochę zdeformować i choć nie zmieni to ani jej symetrii, ani topologii, to jednak spowoduje, że nie wszystkie jej punkty będą miały zerową średnią krzywiznę. Niemniej periodyczne powierzchnie minimalne służą za wzór wszystkich powierzchni periodycznych.

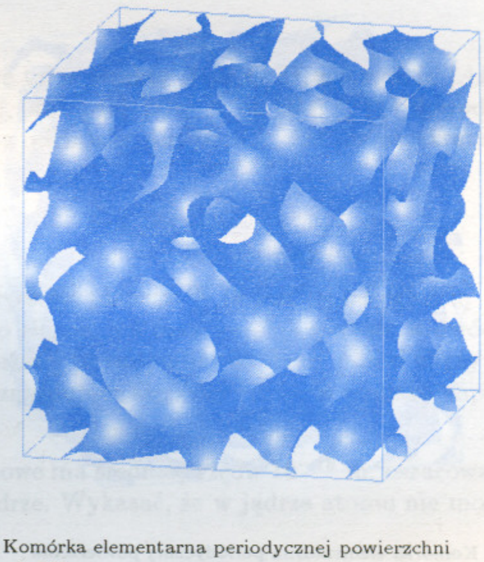
Gdzie w biologii pojawiają się powierzchnie periodyczne? Wiadomo na pewno, że lipidy, z których składają się ściany komórkowe w naszych organizmach, tworzą takie powierzchnie periodyczne w roztworach wodnych. Najczęściej występującą strukturą jest tzw. struktura żyroidalna pokazana na rysunku 8. Być może takie struktury tworzone są w chloroplaście, który jest odpowiedzialny za proces fotosyntezy. Powierzchnie periodyczne pojawiają się w mieszaninach blokowych polimerów (składniki poliuretanu), jak również w kryształach jonowych, jako powierzchnie zerowego potencjału elektrostatycznego.



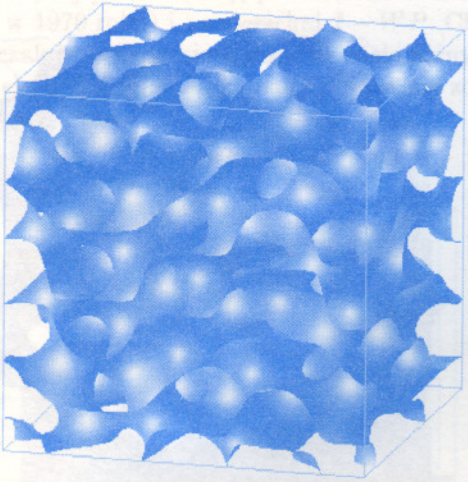
Rys. 12. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej zwanej motylem *BFY*.



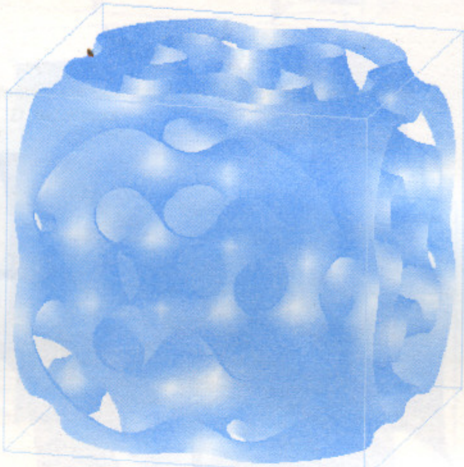
Rys. 13. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej *CPD*.



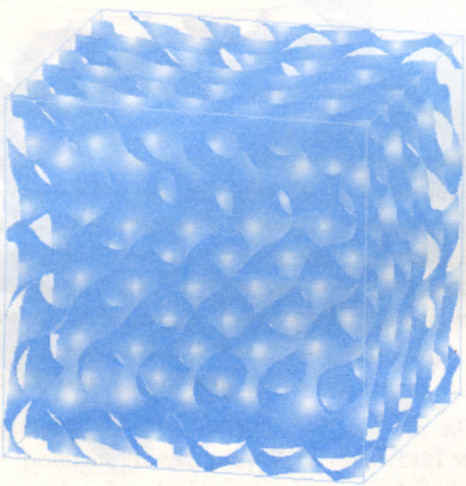
Rys. 14. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej *GX*1.



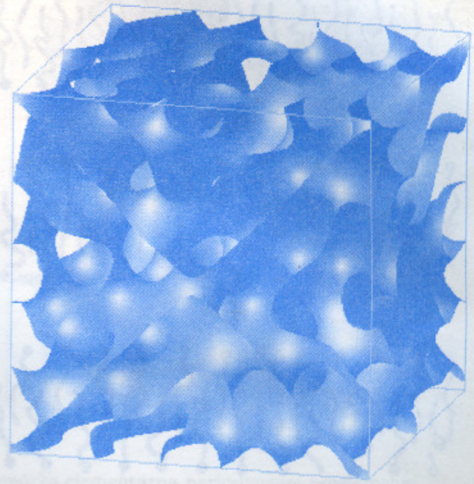
Rys. 15. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $GX2$.



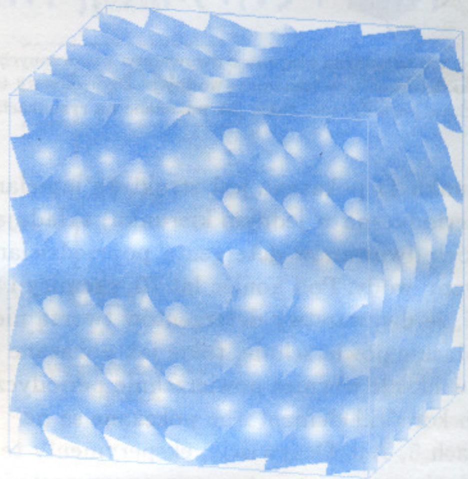
Rys. 16. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $SCN1$.



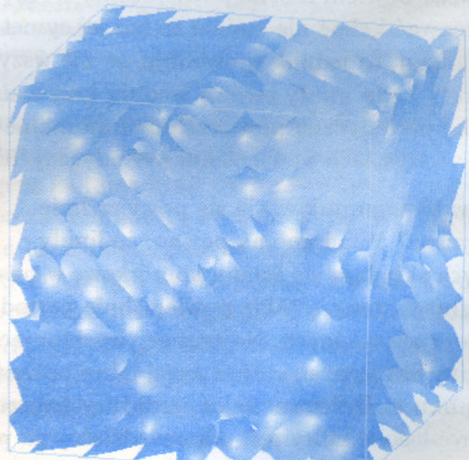
Rys. 17. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $GX3$.



Rys. 18. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $GX4$.



Rys. 19. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $GX5$.



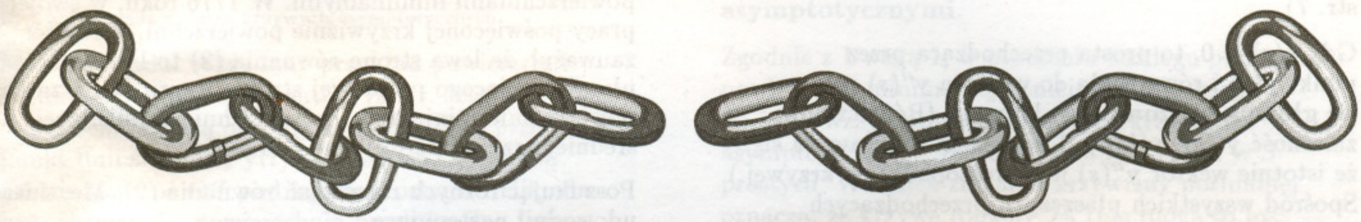
Rys. 20. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej $GX6$.

Opisując roztwory wodne detergentów za pomocą modeli fizycznych udało się autorom tego artykułu pokazać, że bogactwo periodycznych powierzchni jest ogromne i nie zamyka się w tych kilku strukturach (rys. 5, 7–9). Odkryliśmy kilkadziesiąt nowych nie znanych do tej pory powierzchni. Część z nich pokazana jest na rysunkach 12–20 oraz na tylnej okładce *Delty*. Jak widać, niektóre z tych powierzchni są bardzo skomplikowane. Miarą złożoności powierzchni jest jej genus, czyli z grubsza liczba dziur. Dla przykładu: genus sfery jest równy 0, genus torusa jest równy 1 (jedna dziura), a genus precelka (ciasteczko z dwiema dziurami) jest równy 2. Genus powierzchni z rysunku 20 wynosi 141, a genus powierzchni P Schwarza (rys. 5) tylko 3. Czy te nowe powierzchnie są tworzone w układach rzeczywistych? Nie wiadomo.

Nasza praca na pewno nie wyczerpuje bogactwa świata powierzchni periodycznych. Powierzchnie te mają nie tylko walor poznawczy, ale także są piękne poprzez swoją symetrię i wysoką złożoność. Może i Ty, Czytelniku, będziesz kiedyś miał okazję badać te piękne twory matematyczne, których realizację tak nieoczekiwanie odnaleziono w roztworach lipidów i detergentów.

Autorzy dziękują Komitetowi Badań Naukowych za wsparcie badań nad powierzchniami minimalnymi. Praca została wykonana w Instytucie Chemii Fizycznej PAN i Szkole Nauk Ścisłych.

Na tylnej okładce zamieściliśmy zdjęcia komórek elementarnych (lub 1/8 komórki elementarnej) periodycznych powierzchni minimalnych. Powierzchnia rozdziela objętość na dwie rozłączne części zaznaczone kolorami niebieskim i czerwonym.

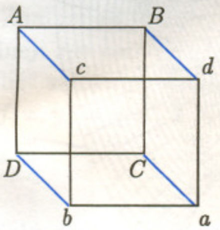


Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 786. W przestrzeni dane są takie punkty A, B, C i D, że $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA| \leq 1$. Udowodnić, że $|AC| \leq \sqrt{2}$ lub $|BD| \leq \sqrt{2}$.
Rozwiązanie na str. 15

M 787. Na płaszczyźnie dane są: koło k o średnicy $\sqrt{2}$ i leżące na zewnątrz niego takie punkty A, B, C i D, że $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA| \leq 1$. Udowodnić, iż przez środek koła można przeprowadzić taką prostą, że wszystkie te punkty będą leżeć po jej jednej stronie.
Rozwiązanie na str. 4

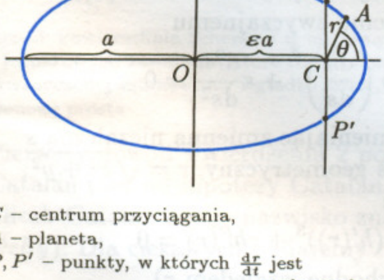


Wszystkie zaznaczone odcinki są nie dłuższe niż 1.

M 788. Na płaszczyźnie dane są takie punkty A, B, C, D, a, b, c, d, że $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$, $|ab|$, $|bc|$, $|cd|$, $|da|$, $|Ac|$, $|Db|$, $|Ca|$, $|Bd| \leq 1$. Udowodnić, że długość co najmniej jednego z odcinków Aa, Bb, Cc, Dd nie przekracza $\sqrt{2}$.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Krzysztof REJMER

F 437. Wykazać, że radialna prędkość planety $\frac{dr}{dt}$ (r jest jej odległością od gwiazdy), poruszającej się po elipsie, ma maksymalną wartość w dwóch punktach znajdujących się na prostej prostopadłej do dużej półosi elipsy i przechodzącej przez gwiazdę (znajdującą się, oczywiście, w ognisku elipsy).
Rozwiązanie na str. 16



C – centrum przyciągania,
A – planeta,
P, P' – punkty, w których $\frac{dr}{dt}$ jest maksymalne.

F 438. Wiedząc, że jądro atomowe ma średnicę rzędu 10^{-15} m, oszacować energię wiązania nukleonu w jądrze. Wykazać, że w jądrze atomu nie mogą znajdować się elektrony.
Rozwiązanie na str. 16