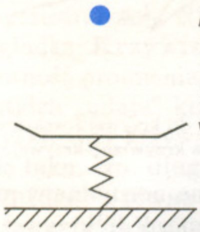
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

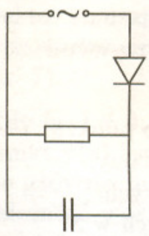
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1996

Skrót regulaminu

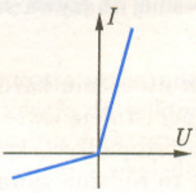
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 225, 226

Redaguje Jerzy B. BROJAN

225. Kulkę upuszczono z pewnej wysokości H na szalkę wagi sprężynowej (rys. 1), od której odbiła się sprężyście, w wyniku czego szalka zaczęła drgać harmonicznie z amplitudą równą $(1/4)H$. Odbita kulka spadła ponownie i po drugim odbiciu wzniosła się na poziom początkowy (z którego została upuszczona). Dla jakiego stosunku mas kulki m i szalki M takie zdarzenie jest możliwe?

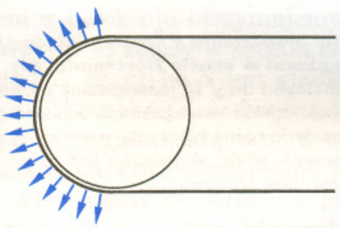
226. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody, opornika o oporze 100 Ω i kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Charakterystyka diody jest przedstawiona na rysunku 3 – w kierunku przewodzenia jej opór wynosi 10 Ω, a w kierunku zaporowym – 1000 Ω. Ile wyniesie napięcie na kondensatorze po upływie bardzo długiego czasu? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1996

Przypominamy treść zadań

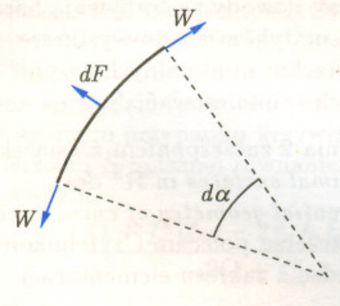
221. Pętlę ze sznura o wytrzymałości W i masie na jednostkę długości ϱ nałożono na dwa walce o promieniu r obracające się z prędkością kątową ω (rys. 4). Jaka jest maksymalna wartość siły odsuwającej osie walców, przy której pętla nie ulegnie zerwaniu? Przyjąć, że siła oddziaływania między sznurem a walcami nie ma składowej stycznej (nie ma więc żadnego przekazu energii), a także nie występuje poślizg.

222. Dwie cienkie powłoki sferyczne o promieniach r_1 i r_2 są ustawione koncentrycznie (pierwsza wewnątrz drugiej) i naładowane równomiernie rozłożonymi ładunkami Q_1 i Q_2, a w środku sfer znajduje się punktowy ładunek q. Jakie związki muszą spełniać q, Q_1 i Q_2, aby powłoki były mechanicznie stabilne, tzn. aby nie podlegały siłom ściskającym ani rozciągającym?



Rys. 4

221. Zgodnie z przyjętym założeniem działająca wzdłuż sznura siła napinająca ma stałą wartość – przyjmijmy, że jest ona równa W (na granicy zerwania). Rozważmy odcinek pętli o długości $\mathrm{d}l$, czemu odpowiada kąt skręcenia $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}l/r$. Na ten odcinek działają dwie siły W (rys. 5), których wypadkowa ma wartość $W\,\mathrm{d}\alpha = W\mathrm{d}l/r$, oraz siła nacisku ze strony walca $\mathrm{d}F$. Ponieważ wypadkowa wszystkich tych sił jest równa $\mathrm{d}m \cdot a = \varrho\,\mathrm{d}l \cdot \omega^2 r$, więc otrzymujemy $\mathrm{d}F/\mathrm{d}l = (W/r) - \varrho\omega^2 r$. Całkowitą siłę $\mathbf{F}$ działającą na oś znajdziemy dodając rzuty $\mathbf{dF}$ na wspólny kierunek (na rys. 4 – kierunek poziomy), co jest równoważne zrzutowaniu odcinków $\mathrm{d}l$ na kierunek pionowy i pomnożeniu sumy (tzn. średnicy walca) przez wyliczone $\mathrm{d}F/\mathrm{d}l$. Ostatecznie $F = (\mathrm{d}F/\mathrm{d}l)\cdot 2r = 2(W - \varrho\omega^2 r^2)$.



Rys. 5

222. Obliczmy siłę działającą na mały element powłoki o powierzchni $\mathrm{d}S$ ze strony reszty powłoki. Jest to równoważne wyliczeniu natężenia pola w środku małej „dziurki w powłoce". Przedstawmy to pole jako sumę pola całej powłoki bez „dziurki" oraz pola samej części usuniętej (małego kółka), której ładunek $\mathrm{d}Q$ został wzięty z przeciwnym znakiem. Jeśli punkt, w którym badamy pole, leży nieco wewnątrz sfery (założenie bez istotnego znaczenia), to w nim pole całej powłoki jest równe zeru i pozostaje tylko pole kółka, którego natężenie jest w bardzo małej odległości od niego takie, jak pole nieskończonej płaszczyzny – czyli równe $\dfrac{1}{2\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$, a po podstawieniu $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$ – równe $\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$. Pierwsza powłoka będzie w równowadze wtedy, gdy obliczone pole w środku „dziurki" (dla $Q = Q_1$) będzie przeciwne do pola ładunku q – stąd $Q_1 = -2q$. W podobny sposób dla drugiej powłoki wyznaczamy $Q_2 = -2(q + Q_1) = 2q$.

A oto nieco prostszy wariant rozwiązania. Oznaczmy natężenie pola elektrycznego po jednej (np. wewnętrznej) stronie powłoki jako E, a po drugiej (np. zewnętrznej) – jako E'. Warunek równowagi powłoki oznacza, że przy niewielkiej zmianie jej promienia pole nie wykonuje nad nią pracy, czyli nie występuje zmiana całkowitej energii pola elektrostatycznego. Ponieważ podczas zmiany promienia powiększa się jeden z dwóch obszarów przestrzeni, a zmniejsza drugi, więc brak zmiany całkowitej energii nastąpi tylko wtedy, gdy $|E| = |E'|$. Przy niezerowym ładunku powłoki oznacza to, że pole po obu stronach powłoki (tuż przy niej) ma tę samą wartość, a przeciwne zwroty. Otrzymujemy te same warunki, co poprzednio: $Q_1 = -2q$ i $Q_2 = -2(q + Q_1) = 2q$.

Zadania z matematyki nr 327, 328

Redaguje Marcin E. KUCZMA

327. Rozważamy wielomiany postaci $x^4 + ax^3 + bx + c$, mające cztery pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu ab.

328. Zbiór Z zawarty w płaszczyźnie ma następującą własność: dla każdego punktu $P \in Z$ liczba punktów $Q \in Z$ spełniających warunek $|PQ| = r$ wynosi

$$2 \text{ gdy } 0 < r < 1; \qquad 1 \text{ gdy } r = 1; \qquad 0 \text{ gdy } r > 1.$$

Czy zbiór Z musi być okręgiem?

Zadanie **328** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1996

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 313 (WT=2,67) i 314 (WT=1,62) z numeru 1/1996

Piotr Lipiński	– Radom	43,51
Henryk Kornacki	– Augustów	42,07
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	38,10
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	35,76

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1996

Przypominamy treść zadań:

323. Wyznaczyć wszystkie potęgi liczby 2 (o wykładniku całkowitym dodatnim), których zapis w siódemkowym układzie pozycyjnym składa się z samych jedynek.

324. Punkt G jest środkiem ciężkości czworościanu $ABCD$ wpisanego w sferę o środku O i promieniu R. Proste AG, BG, CG, DG przecinają tę sferę odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od A, B, C, D). Dowieść, że $\dfrac{1}{|GK|^2} + \dfrac{1}{|GL|^2} + \dfrac{1}{|GM|^2} + \dfrac{1}{|GN|^2} \geq \dfrac{4}{R^2}$.

323. Ciąg złożony z x jedynek przedstawia w układzie siódemkowym liczbę $(7^x - 1)/6$. Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania równania $7^x - 1 = 6 \cdot 2^y$, czyli

$$7^x - 1 = 3 \cdot 2^{y+1}$$

w liczbach całkowitych $x, y \geq 1$.

Jeśli para (x, y) jest rozwiązaniem, to prawa strona tego równania dzieli się przez 4, wobec czego x musi być liczbą parzystą: $x = 2k$. Lewa strona jest więc równa iloczynowi $(7^k + 1)(7^k - 1)$, w którym pierwszy czynnik nie dzieli się przez 3. Zatem

$$7^k + 1 = 2^u, \qquad 7^k - 1 = 3 \cdot 2^v$$

dla pewnych liczb całkowitych $u \geq 3$, $v \geq 1$. Odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy równość $1 = 2^{u-1} - 3 \cdot 2^{v-1}$; ostatni składnik musi być liczbą nieparzystą. Stąd $v = 1$, $k = 1$, $x = 2$, $y = 3$. Para $(x, y) = (2, 3)$ spełnia rozważane równanie i jest jego jedynym rozwiązaniem.

324. Oznaczmy: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{v}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{v}_2$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{v}_3$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{v}_4$, $\overrightarrow{OG} = \mathbf{w} = \frac{1}{4}\sum \mathbf{v}_i$. Każdy z iloczynów $|AG| \cdot |GK|$, $|BG| \cdot |GL|$, $|CG| \cdot |GM|$, $|DG| \cdot |GN|$ jest równy $R^2 - |OG|^2$. Stąd

$$\frac{1}{|GK|^2} = \frac{|AG|^2}{(R^2 - |OG|^2)^2} = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1)^2}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2};$$

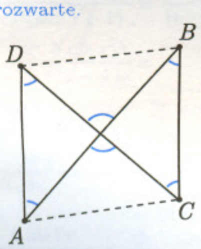
pozostałe trzy składniki rozważanej sumy wyrażają się analogicznymi wzorami. A zatem

$$\frac{1}{|GK|^2} + \frac{1}{|GL|^2} + \frac{1}{|GM|^2} + \frac{1}{|GN|^2} = \frac{\sum(\mathbf{w} - \mathbf{v}_i)^2}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} = \frac{\sum(R^2 + \mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i)}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} =$$

$$= \frac{4R^2 + 4\mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot 4\mathbf{w}}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} = \frac{4}{R^2 - \mathbf{w}^2} \geq \frac{4}{R^2}.$$

Rozwiązanie zadania M 786. Jeśli $A = C$ lub $B = D$, to teza zadania jest oczywista. W przeciwnym razie zrzutujmy wszystkie punkty na płaszczyznę równoległą do prostych AC i BD, co sprowadzi zadanie do przypadku, gdy wszystkie punkty leżą w jednej płaszczyźnie (rzut prostopadły zachowuje długość odcinków równoległych do płaszczyzny rzutowania i nie wydłuża pozostałych). Załóżmy, że teza zadania nie jest spełniona.

Z twierdzenia cosinusów wiemy, że jeśli długości ramion trójkąta są mniejsze od 1, a długość podstawy jest nie mniejsza od $\sqrt{2}$, to kąt między ramionami jest rozwarty. Wynika stąd, iż łamana zamknięta $ABCD$ nie może wyznaczać czworokąta, gdyż musiałby on mieć wszystkie kąty rozwarte. Jeśli natomiast łamana miałaby samoprzecięcie, w pewnych trójkątach musiałyby być po dwa kąty rozwarte.



Gdyby było $|AC|$, $|BD| > \sqrt{2}$, to wszystkie kolorowe kąty byłyby rozwarte.

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 788. Załóżmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych i zdefiniujmy punkty:

$$A' = \frac{1}{2}(A - a), \quad a' = \frac{1}{2}(a - A), \quad B' = \frac{1}{2}(B - b), \quad b' = \frac{1}{2}(b - B),$$

$$C' = \frac{1}{2}(C - c), \quad c' = \frac{1}{2}(c - C), \quad D' = \frac{1}{2}(D - d), \quad d' = \frac{1}{2}(d - D).$$

Łatwo zauważyć, że $|A'a'| = |Aa|$, $|B'b'| = |Bb|$, $|C'c'| = |Cc|$, $|D'd'| = |Dd|$, więc także długość tych „nowych" odcinków jest większa od $\sqrt{2}$. Wynika stąd, że punkty te leżą na zewnątrz koła o środku w punkcie $(0,0)$ i średnicy $\sqrt{2}$ (początek układu współrzędnych jest środkiem odcinków $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, $D'd'$). Ponadto, z nierówności trójkąta wynika, iż $|A'B'|$, $|B'C'|$, $|C'D'|$, $|D'A'|$, $|a'b'|$, $|b'c'|$, $|c'd'|$, $|d'a'|$, $|A'c'|$, $|D'b'|$, $|C'a'|$, $|B'd'| \leq 1$, (czyli po prostu zredukowaliśmy zadanie do „przypadku środkowo-symetrycznego"). Dla przykładu:

$$|A'B'| = |\frac{1}{2}(A - a) - \frac{1}{2}(B - b)| = |\frac{1}{2}(A - B) + \frac{1}{2}(b - a)| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |ab|) \leq \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

Pozostałe nierówności można udowodnić w podobny sposób. Na mocy zadania **787.** widzimy, że istnieje taka prosta przechodząca przez punkt $(0,0)$, że punkty A', B', C', D' leżą po jednej jej stronie, punkty a', b', c', d' zaś – po drugiej. Podobnie, niech przechodzące przez punkt $(0,0)$ proste β i γ oddzielają odpowiednio punkty A', D', b', c' od B', C', a', d' i A', B', d', c' od D', C', a', b'. Jednakże trzy proste przechodzące przez jeden punkt dzielą płaszczyznę na nie więcej niż 6 części, więc któreś dwa spośród punktów A', B', C', D', a', b', c', d' nie są oddzielone żadną z prostych α, β, γ, co prowadzi do sprzeczności. Teza zadania jest więc prawdziwa.