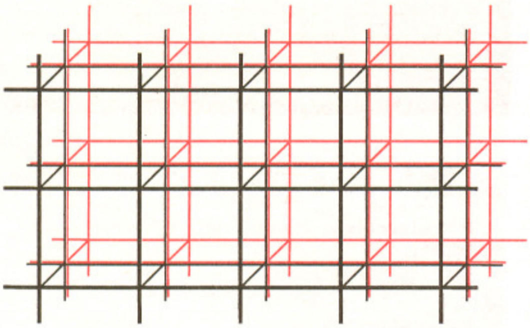
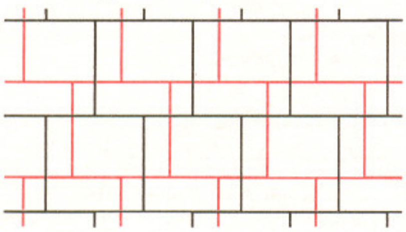
Najprostsze wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami

Małgorzata DWORSKA

Każdy zapytany o tytułowe wypełnienie przestrzeni wymieni równe ułożenie w niej sześcianów w ten sposób, by – jeśli już się dotykają – dotykały się wierzchołkami, całymi krawędziami lub całymi ścianami. Wypełnienie spełniające taki właśnie warunek na stykanie się wielościanów nazywa się *normalne* i uchodzi za regularniejsze, prostsze od innych wypełnień. Przedstawione na rysunku 1 wypełnienie sześcianami jest normalne, czego więc mu brakuje, by uznać, że jest ono najprostsze z możliwych?



Rys. 1. Normalne wypełnienie przestrzeni sześcianami.



Rys. 2. Minimalne wypełnienie przestrzeni sześcianami; narysowane zostały tylko dwie warstwy (czarna i kolorowa), na dodatek widziane wzdłuż krawędzi, ale chyba można wyobrazić sobie, jakie jest to wypełnienie.

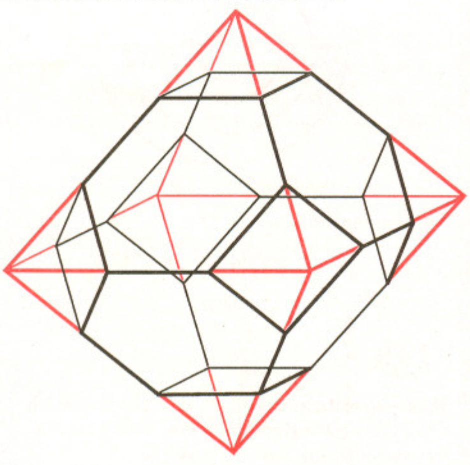
Wadą tą jest fakt stykania się w jednym punkcie przestrzeni aż ośmiu sześcianów. Czy istnieje takie wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami, że w żadnym punkcie nie styka się 8 wielościanów? Tak. Można nawet wskazać takie wypełnienie sześcianami – przesuńmy trochę kolejne warstwy wypełnienia, od którego zaczęliśmy nasze rozważania. Henri Lebesgue zauważył w 1911 roku (a z czasem i udowodnił), że przestrzeń euklidesową n-wymiarową można tak wypełnić wielościanami, by w każdym punkcie stykało się ich nie więcej niż $n+1$, i liczby tej zmniejszyć już się nie da. Takie wypełnienie przestrzeni nazywa się *minimalne*. Dla zwykłej, trójwymiarowej przestrzeni oznacza to możliwość wypełnienia jej wielościanami w ten sposób, że w jednym punkcie spotykać się ich będzie co najwyżej cztery. To znów można zrealizować za pomocą sześcianów – trzeba je tylko poprzesuwać bardziej wymyślnie.

Widzimy jednak, że wypełnienie – co prawda – stało się minimalne, ale przestało być normalne. Czy zatem istnieje normalne i minimalne wypełnienie przestrzeni jednakowymi wielościanami? Ono właśnie zasługiwałoby na określenie *najprostsze*. Okazuje się, że wypełnienie takie istnieje i przedstawienie go jest celem tego artykułu.

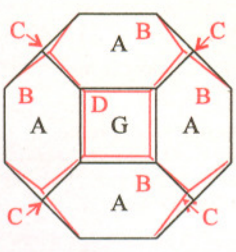
Oczywiście, nie będzie to wypełnienie sześcianami. Najpierw więc przedstawię odpowiedni wielościan.

Wyobraźmy sobie ośmiościan foremny o krawędzi 1, który ma naroża ścięte płaszczyznami przechodzącymi przez punkty leżące na krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka w odległości $\frac{1}{3}$ od tego wierzchołka. Otrzymana figura (rys. 3) nosi nazwę *tetrakaidekahedron*, co znaczy, że ma 14 ścian, mianowicie 6 kwadratów i 8 foremnych sześciokątów (proszę sprawdzić).

Podejrzewam, że zdecydowana większość osób, które obejrzą rysunek 3 lub wezmą do ręki model czternastościanu, na pytanie *czy da się takimi bryłami szczelnie wypełnić przestrzeń?* odpowie NIE. Można, oczywiście, zaproponować wtedy wykonanie kilkunastu modeli (np. sklejonych z tekturki) i podjęcie doświadczeń.



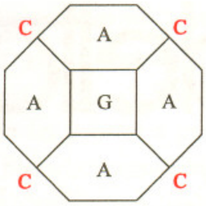
Rys. 3. Otrzymywanie tetrakaidekahedronu z ośmiościanu.



Rys. 4.

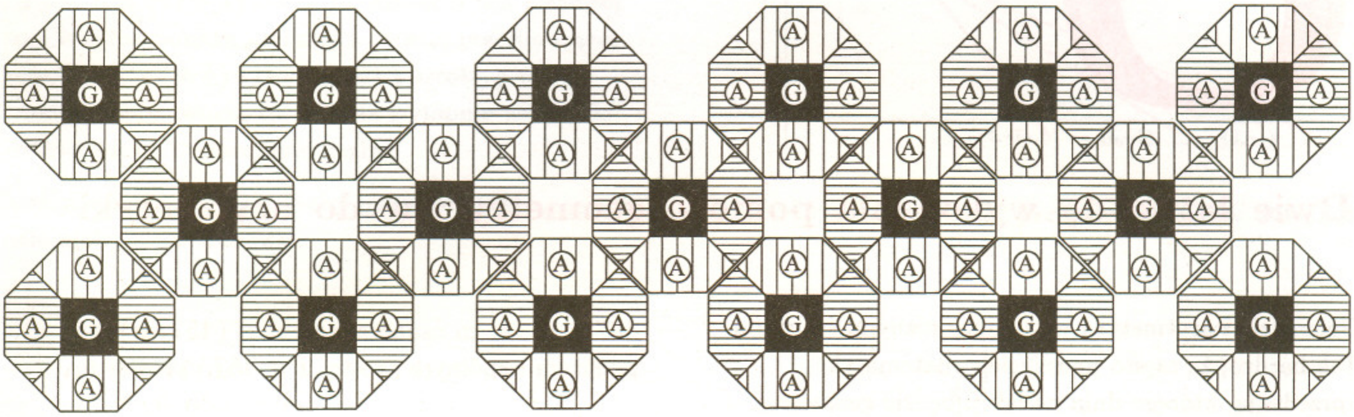
Jak jednak przekonać się bez wykonywania modeli (bo dla wielu sklejenie choćby kilku takich wielościanów może okazać się zbyt pracochłonne), że prawidłowa odpowiedź na to pytanie brzmi TAK?

Dla usprawnienia dalszych rozważań oznaczymy ściany czternastościanu w następujący sposób: sześciokąty widziane na rysunku 4 jako górne będą nosiły literę A, a widziane jako dolne – literę B, kwadraty dolny i górny odpowiednio literę D i G, wszystkie zaś kwadraty boczne – C.



Rys. 5. Rzut prostokątny tetrakaidekahedronu.

Przyjrzyjmy się rzutowi prostokątnemu czternastościanu na płaszczyznę jego ściany D. Jest to ośmiokąt. Można z takich ośmiokątów ułożyć posadzkę na płaszczyźnie. Mianowicie ułóżmy ośmiokąty w ten sposób, by stykały się **bokami** C. Otrzymana posadzka nie będzie szczelna – pomiędzy jej kafelkami pozostaną kwadratowe otwory (rys. 6). Ta sama posadzka to widok z góry czternastościanów ustawionych (na płaszczyźnie, np. na stole) obok siebie w ten sposób, by stykały się **ścianami** C. Wygląda to trochę tak, jak kartonowe panele używane w sklepach do jajek.

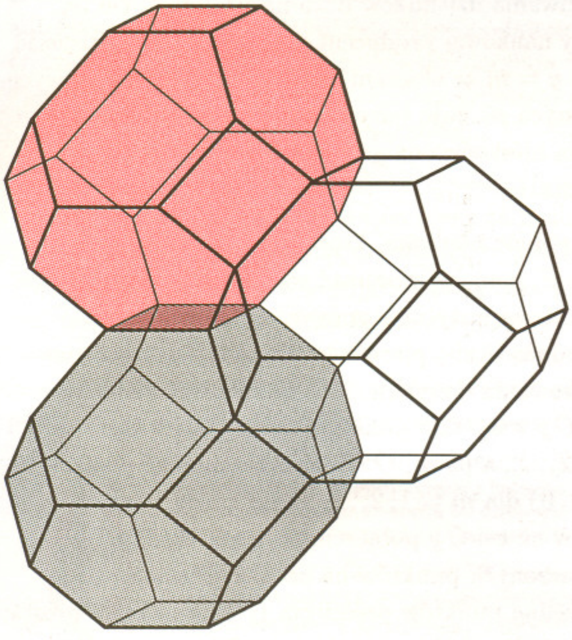


Rys. 6.

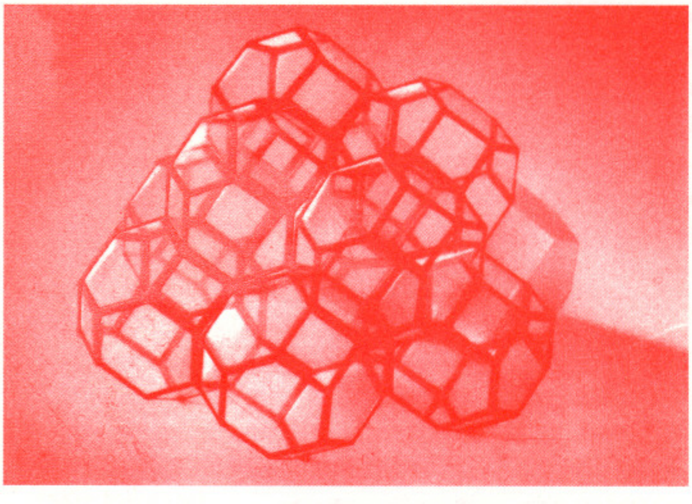
Przy tym wgłębienia są dokładnie takie same jak wypukłości. Biorąc zatem identyczną drugą warstwę czternastościanów można ją tak ułożyć na pierwszej, by w miejsce wolnych kwadratów dolnej warstwy weszły ściany D warstwy górnej, otwory zaś w drugiej warstwie były od dołu zatkane ścianami G dolnej warstwy. Ściany A dolnej warstwy będą dokładnie przylegać do ścian B warstwy górnej. I tak możemy dodawać nowe warstwy bez końca.

Na zakończenie wypada spróbować przedstawić rzecz przestrzennie. Rysunek 7 przedstawia trzy sąsiadujące czternastościany, a rysunek 8 większą ich liczbę. Ten ostatni jest zdjęciem modelu tej sytuacji zamieszczonym w *Kalejdoskopie Matematycznym* Hugona Steinhausa. Tam można też znaleźć sugestię, jak można wpaść na pomysł, że czternastościan jest bryłą realizującą minimalne wypełnienie normalne przestrzeni. Nie ma natomiast żadnych wskazówek sugerujących, jak wykazać, że jest to jedyna bryła o foremnych ścianach spełniająca oba te żądania. Pozostaje to zatem do zupełnie samodzielnych dociekań Czytelnika.

Fakt, że tetrakaidekahedron wypełnia szczelnie przestrzeń, jest dobrze znany biologom, którzy zajmują się strukturą komórek roślinnych, gdyż niektóre z nich mają właśnie taki kształt.



Rys. 7. Można wyobrazić sobie, że każdy z narysowanych czternastościanów należy do innej warstwy budowanego wypełnienia.



Rys. 8.