Klub 44

$$\sqrt{\int \!\!\! \sum !} = 44$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1996

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 311 (WT=2,13) i 312 (WT=2,71) z numeru 12/1995

Jerzy Witkowski	– Wodzisław Śl.	46,10
Piotr Lipiński	– Radom	41,89
Henryk Kornacki	– Augustów	40,45
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	38,10
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	37,54

Pan Witkowski: numer 79 w **Klubie 44** M.

Zadania z matematyki nr 325, 326

Redaguje Marcin E. KUCZMA

325. Okrąg wpisany w trójkąt ostrokątny ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Prosta przechodząca przez jego środek i równoległa do boku BC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L. Odcinki KQ i LP przecinają się w punkcie S. Odcinek SN jest wysokością w trójkącie KLS. Dowieść, że $\angle PNS = \angle QNS$.

326. Udowodnić, że dla liczb $\alpha, \beta \in (-\pi/2; \pi/2)$ zachodzi nierówność

$$\ln\frac{1-\sin\alpha}{1-\sin\beta}\cdot\ln\frac{1+\sin\beta}{1+\sin\alpha} \geq (\beta-\alpha)^2\,.$$

Zadanie **326** zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1996

Przypominamy treść zadań:

321. Po nieskończonej szachownicy porusza się (m,n)-koń, czyli figura, która w każdym ruchu przemieszcza się o m pól poziomo i n pól pionowo – lub odwrotnie. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m, n \geq 1$, dla których (m,n)-koń, startując z dowolnego pola szachownicy, może osiągnąć każde inne pole.

322. Dane są liczby naturalne $m, q > 1$ oraz liczba p określona przez równanie $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Obliczyć część całkowitą sumy $1^{-1/p}+2^{-1/p}+\ldots+(m^q-1)^{-1/p}$.

321. Przyjmijmy, że (m,n)-koń startuje z pola $(0,0)$. Jeśli liczby m i n mają wspólny dzielnik $d>1$, to (m,n)-koń porusza się tylko po polach (x,y) o obu współrzędnych podzielnych przez d. Jeśli suma $m+n$ jest liczbą parzystą, to (m,n)-koń porusza się tylko po polach (x,y) o obu współrzędnych jednakowej parzystości. Zatem warunek:

$$(*)\qquad \mathrm{NWD}(m,n)=1\,;\qquad m+n\equiv 1 \pmod 2)$$

jest konieczny na to, aby (m,n)-koń mógł osiągnąć każde pole szachownicy.

Wykażemy, że jest to także warunek dostateczny. Jeśli jest on spełniony, to liczby m i n są różnej parzystości – można przyjąć, że n jest liczbą parzystą, a m nieparzystą – oraz istnieją liczby naturalne k,l spełniające równość $kn-lm=1$. Weźmy pod uwagę liczby naturalne

$$c_1=\tfrac{1}{2}(m+1)k,\qquad c_2=\tfrac{1}{2}(m+1)l,\qquad c_3=\tfrac{1}{2}nk,\qquad c_4=\tfrac{1}{2}nl$$

oraz wektory

$$\mathbf{v}_1=[n,m],\qquad \mathbf{v}_2=[-n,m],\qquad \mathbf{v}_3=[-m,n],\qquad \mathbf{v}_4=[m,n]\,.$$

Dzielny nasz koń jest w stanie przemieścić się o każdy z wektorów $\pm\mathbf{v}_i$, więc także i o wektor

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= c_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)+c_2(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4)+c_3(\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4)+c_4(-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_4 = \\ &= [kn(m+1)-lm(m+1)-m\,,\,(kn-lm-1)n]=[1,0]\end{aligned}$$

– więc także i o każdy z wektorów $[0,1]$, $[-1,0]$, $[0,-1]$. To znaczy, że jest w stanie osiągnąć każde pole szachownicy. Zatem warunek $(*)$ charakteryzuje szukane pary (m,n).

322. Funkcja $f(x)=x^{-1/p}$ jest ciągła oraz malejąca na przedziale $(0;\infty)$. Niech $n=m^q$. Rozważana w zadaniu suma S spełnia zależności:

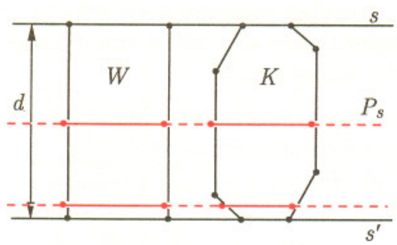
$$S=\sum_{k=1}^{n-1}f(k) > \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x > \sum_{k=2}^{n}f(k) > S-f(1)=S-1.$$

A ponieważ

$$\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = qx^{1/q}\Big|_1^n = q(m-1),$$

otrzymujemy stąd dwustronne oszacowanie $q(m-1)<S<q(m-1)+1$, które pokazuje, że część całkowita liczby S równa się $q(m-1)$.

Rozwiązanie zadania M 783.
Oznaczmy objętość wielościanu K przez V. Niech s będzie płaszczyzną zawierającą jedną ze ścian K, s' zaś jej obrazem w symetrii względem środka symetrii wielościanu. Oznaczmy przez P_s pas przestrzeni zawarty między płaszczyznami s i s'. Niech d oznacza szerokość pasa P_s, czyli odległość między płaszczyznami s i s', a W niech będzie walcem o polu podstawy 2 i podstawach zawartych w płaszczyznach s i s'.



Przekrój K dowolną płaszczyzną równoległą do s ma pole nie większe niż 2, czyli niż jej przekrój z W, więc na mocy zasady Cavalieriego objętość wielościanu K nie przekracza objętości walca W; zatem $2d \geq V$, co oznacza, że kula o promieniu $\frac{V}{4}$ i środku w środku symetrii wielościanu K zawiera się w pasie P_s. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej ściany wielościanu, więc kula ta zawiera się w przecięciu pasów przedłużających wszystkie pary równoległych ścian, czyli w samym wielościanie K. Stąd wynika oczywista nierówność między objętościami kuli i wielościanu:

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{V}{4}\right)^3 \leq V\,,$$

skąd $V \leq \sqrt{\frac{48}{\pi}} < 4$, co kończy dowód.

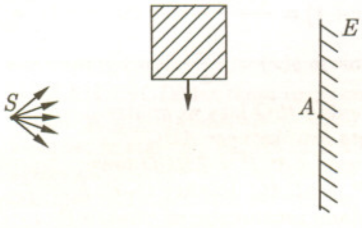
Z twierdzenia Andersona (patrz zadanie **M 732**, *Delta* 3/1995) wynika, że w założeniach zadania wystarczy rozpatrywać przekroje płaszczyznami przechodzącymi przez środek symetrii wielościanu. Czytelnik zechce zastanowić się, czy podobne szacowania zachodzą dla wielościanów niesymetrycznych.

Zadania z fizyki nr 223, 224

Redaguje Jerzy B. BROJAN

223. Na powierzchni wody pływa:
a) prostopadłościan o bokach a, b i h, przy czym krawędź h jest pionowa.
b) walec o promieniu r i wysokości (pionowej) h,
c) stożek o kącie rozwarcia 2α i wysokości h, podstawą do góry.
Jeśli wszystkie bryły są jednorodne, to jakie warunki muszą spełniać gęstość ϱ oraz wymienione parametry, aby w tej pozycji równowaga była stabilna, tzn. aby po małym wychyleniu bryła powracała do pozycji początkowej?

Wystarczy podanie jednego z trzech rozwiązań, przy czym maksymalna ocena wynosi 0,8 w przypadku a), 0,9 w przypadku b) i 1 w przypadku c).



Rys. 1.

224. Punktowe źródło światła S oświetla ekran E (rys. 1). Czy wstawienie między źródło a ekran płaskorównoległej, płytki szklanej spowoduje wzrost natężenia oświetlenia środkowej części ekranu (okolicy punktu A), czy spadek, czy też natężenie oświetlenia nie zmieni się? Jeśli wystąpi zmiana, to czy będzie ona silniejsza, gdy płytkę o ustalonej grubości wsuniemy bliżej źródła, czy bliżej ekranu? Zakładamy, że płytka jest pokryta warstwą przeciwodblaskową eliminującą odbicie, a szkło jest doskonale przezroczyste.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1996

Przypominamy treść zadań:

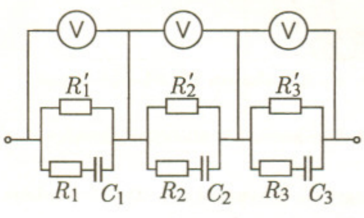
219. Jeden koniec nierozciągliwej i nieważkiej nitki o długości l jest przymocowany do pewnego punktu na powierzchni bocznej walca o promieniu r, a drugi koniec – do małej kulki znajdującej się w odległości $l+r$ od osi walca (rys. 2). W chwili początkowej kulka była nieruchoma, a walec wprawiono w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω wokół jego osi. Gdy nitka się nawinie, z jaką prędkością kulka uderzy w walec? Na kulkę działa tylko siła wywierana przez nitkę (pomijamy siłę ciężkości i opory ruchu).

220. Trzy woltomierze mierzą napięcia na trzech „czarnych skrzynkach" połączonych szeregowo. Początkowo napięcia były równe zeru, a gdy do układu dołączono stałe napięcie 60 V, pierwszy woltomierz wskazał napięcie 10 V, drugi – 20 V, a trzeci – 30 V. Po pewnym czasie napięcie na pierwszej „czarnej skrzynce" wzrosło do 30 V, na drugiej zmalało do 10 V, a na trzeciej zmalało do 20 V. Po jeszcze dłuższym czasie napięcia wynosiły kolejno 20 V, 30 V i 10 V. Zaprojektować jak najprostsze wnętrze „czarnych skrzynek", które da taki efekt. Można przyjąć, że woltomierze nie zakłócają mierzonego napięcia (mają bardzo duży opór wewnętrzny).

Rys. 2

219. Zastosujmy zasadę zachowania energii w układzie nieinercjalnym obracającym się razem z walcem. W tym układzie na kulkę znajdującą się w odległości r' od osi działa siła odśrodkowa $m\omega^2 r'$, której można przypisać „potencjalną energię odśrodkową" – wyższą bliżej osi, a niższą z dala od niej. Standardowe całkowanie prowadzi do wzoru na tę energię: $E_{\text{odśr}} = -(1/2)m\omega^2 r'^2$. Ponadto na kulkę działa też siła Coriolisa, ale – podobnie jak siła napięcia nitki – jest ona skierowana prostopadle do kierunku ruchu kulki, więc nie wykonuje nad nią pracy i w bilansie energii można ją pominąć. Ponieważ w chwili początkowej kulka w układzie inercjalnym była nieruchoma, więc w układzie obracającym się jej prędkość wynosiła $\omega r'$ (gdzie $r' = l + r$) i widzimy, że energia kinetyczna była równa energii odśrodkowej z przeciwnym znakiem, czyli całkowita energia jest równa zeru. Tak samo będzie i w chwili uderzenia kulki o walec, gdy odległość od osi będzie równa r – zatem prędkość uderzenia wyniesie $v = \omega r$. Prędkość ta będzie skierowana prostopadle do powierzchni walca, czyli w układzie inercjalnym prędkość kulki będzie miała także składową styczną o tej samej wartości ωr.

Alternatywną metodą rozwiązania jest zastosowanie zasad zachowania energii i momentu pędu w układzie inercjalnym, przy czym początkowo należy przyjąć, że walec ma pewien dany moment bezwładności I, po czym przejść do granicy $I \to \infty$ (lub $m \to 0$, gdzie m – masa kulki).



Rys. 3

220. Rozwiązaniem może być obwód przedstawiony na rysunku 3, przy czym zakładamy, że $R_1' \gg R_1$, $R_2' \gg R_2$, $R_3' \gg R_3$. Początkowo prąd płynie głównie przez dolną gałąź wszystkich trzech „czarnych skrzynek", a dopóki kondensatory się nie naładują w znaczącym stopniu, dopóty napięcia będą proporcjonalne do oporów R_1, R_2 i R_3. Zgodność z pierwszą serią danych osiągniemy więc kładąc $R_3 = 3R_1$ oraz $R_2 = 2R_1$. Po pewnym czasie kondensatory naładują się jednakowym ładunkiem i – jeśli wciąż można pominąć górne gałęzie – prąd przestanie płynąć. Wtedy napięcia będą odwrotnie proporcjonalne do pojemności kondensatorów – przyjmijmy więc $C_3 = 1{,}5C_1$ i $C_2 = 3C_1$. Wreszcie po odpowiednio długim czasie będziemy mieli do czynienia tylko z bardzo małym prądem płynącym w górnej gałęzi, a napięcia będą proporcjonalne do oporów „primowanych" – należy zatem położyć $R_1' = 2R_3'$, $R_2' = 3R_3'$.

Czas charakterystyczny dla przejścia od pierwszego do drugiego zestawu wskazań woltomierzy jest równy $\tau = R_z C_z$, gdzie R_z jest oporem zastępczym trzech dolnych oporników połączonych szeregowo, a C_z – analogiczną pojemnością zastępczą. Oznacza to, że dojście do drugiego zestawu wskazań nastąpi po czasie rzędu kilku (3–5) τ. Czas charakterystyczny dla „włączenia się" górnej gałęzi jest rzędu $R_1'C_1$ (lub $R_2'C_2$, lub $R_3'C_3$; dla uproszczenia zaniedbajmy różnice). Oczywiście, ten czas powinien być znacznie dłuższy od τ, a ustalenie się stanu końcowego nastąpi po czasie jeszcze kilka razy dłuższym.

Zgodnie z podaną wskazówką należało założyć, że opór wewnętrzny woltomierzy jest bardzo wielki (znacznie większy od wszystkich innych oporów). Ewentualnie można również przyjąć, że ten opór jest podobnego rzędu co opory „primowane" i uwzględnić go (w sensie połączenia równoległego) przy obliczaniu wartości R_1', R_2' i R_3'.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 211 (WT=1,19) i 212 (WT=3,02)
z numeru 1/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	38,77
Aleksander Surma	– Myszków	36,60
Przemysław Gworys	– Częstochowa	31,80
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	27,87