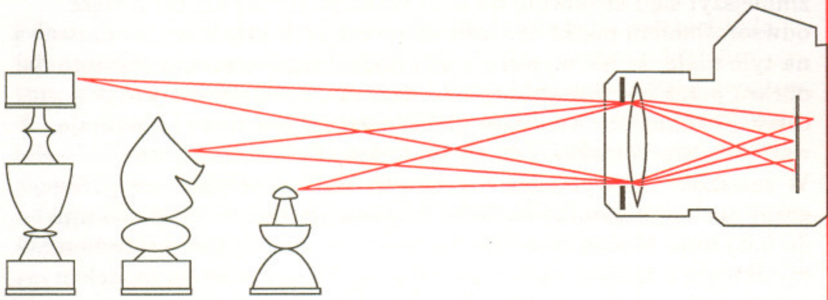
Głębia ostrości

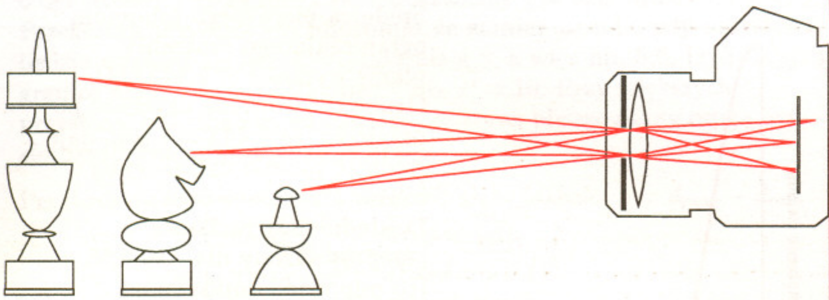
Grzegorz DERFEL

Operowanie głębią ostrości należy do podstawowych środków, jakimi dysponuje fotograf w celu osiągnięcia ekspresji zdjęcia. Mała głębia ostrości pozwala wydzielić fotografowany obiekt z tła, które w przeciwnym razie rozpraszałoby uwagę widza. Zdarzają się też sytuacje, w których pożądana jest jak największa głębia ostrości, niezbędna do wyraźnego przedstawienia obiektów położonych w różnych planach.

W artykule wyjaśnimy po pierwsze, dzięki czemu istnieje głębia ostrości, to jest dlaczego można uznać za ostro zobrazowane przedmioty leżące w pewnym (czasem bardzo szerokim) przedziale odległości od aparatu, a nie tylko te, które leżą w ściśle określonym planie, na który nastawiony jest obiektyw. Po drugie, wykażemy, jakie czynniki mają wpływ na szerokość tego przedziału. I po trzecie, przedstawimy sposoby obliczania głębi ostrości w zależności od ogniskowej obiektywu, przysłony i odległości do fotografowanego obiektu. Do wymienionych zagadnień będą zastosowane prawa optyki geometrycznej, które są dobrym przybliżeniem w praktyce fotograficznej.



Rys. 1



Rys. 2

Rysunki 1 i 2 przedstawiają sytuację, w której przedmiotem zdjęcia są trzy figury szachowe położone w różnych odległościach od aparatu: król, skoczek i pion. Oba rysunki ilustrują rolę wielkości otworu względnego przysłony. Czytelnikom nie parającym się fotografią pomocne będzie wyjaśnienie, że stosunek ogniskowej obiektywu f do średnicy otworu D, przez który do aparatu dostaje się światło, oznaczany jest liczbą przysłony P. Liczby te tworzą standardowo ciąg: 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22;... począwszy od otworu największego do najmniejszego. Ponieważ kolejne liczby ciągu oznaczają średnice różniące się w przybliżeniu o czynnik $\sqrt{2}$, a oświetlenie błony jest proporcjonalne do $(D/f)^2$, to zmienia się ono dwukrotnie przy zmianie przysłony o jedną „działkę".

Przygody matematyki wśród ludzi (IV)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Całkowite zwycięstwo

Marek KORDOS

Podstawową zaletą matematyki dla starożytnych filozofów była pewność jej stwierdzeń. Żadna dyscyplina nauki tak ongiś, jak i dziś nie może się pochwalić tak niewątpliwą, niepodważalną prawdziwością swoich orzeczeń. Zaleta ta została matematyce dana przez greckich twórców jej kanonów, kanonów uzyskiwania jej twierdzeń, kanonów prowadzenia rozumowań.

Dla ludzi XVII wieku główny walor matematyki znajdował się gdzie indziej – matematyka stosowała się do każdej właściwie dyscypliny ludzkiej działalności, przynosząc każdej z nich nowe osiągnięcia praktyczne. Bardzo szeroko do dziś jest dyskutowana *zdumiewająca stosowalność matematyki w praktyce*. Istotnie – jest czemu się dziwić. Okazuje się bowiem, że stworzone na drodze intelektualnej spekulacji Starożytnych zasady, podstawy matematyki, zawierają istotnie to, co w nich widzieć chcieli pitagorejczycy: najgłębszą prawdę o Wszechświecie i zamieszkujących go ludziach. Pomysł, że nasi przodkowie sprzed 2,5 tysiąca lat umieli uchwycić to najistotniejsze, jest dość szokujący. Wymyślono dla uzasadnienia tego zjawiska wiele różnorodnych objaśnień. Sama sprawa skutecznej stosowalności matematyki uważana jest jednak ciągle za otwartą.

Niemniej, niezależnie od tego, czy umiemy przyczynę tego wyjaśnić, czy też nie, od siedemnastego wieku następuje (aż po wiek dwudziesty) bezustanna ekspansja metod matematycznych we wszystkich gałęziach ludzkiego działania. Najbardziej spektakularne jest przenoszenie nowych dyscyplin do matematyki. Zdanie to wymaga wyjaśnienia. Otóż powstające w XVII wieku akademie nauk miały w zasadzie dwa wydziały: matematykę i fizykę. Do matematyki zaliczano te wszystkie dziedziny wiedzy, w których dopracowano się bezwzględnie ścisłych metod pozyskiwania prawd. Była więc w matematyce np. geometria, była od początku istnienia akademii optyka geometryczna. „Reszta" – jeszcze na początku XIX wieku np. elektryczność, magnetyzm, fizjologia, mineralogia – była w fizyce. Znamy konkretną datę przeniesienia mechaniki teoretycznej z fizyki do matematyki: jest to 1788 rok – osiem lat temu obchodzono nawet dwóchsetlecie tego wydarzenia (data ta to rok wydania *Mechaniki analitycznej* Lagrange'a). O surowości wymagań przy kwalifikowaniu do dyscyplin matematycznych może świadczyć fakt, że rezultaty Galileusza, Newtona, Bernoulliego czy d'Alemberta nie były dla takiego awansu mechaniki wystarczające.

Najbardziej spektakularnie matematyzował rozmaite dyscypliny do dziś nie mający sobie równych w płodności i wszechstronności Leonhard Euler (występuje zresztą z tego powodu w księdze Guinnessa). Euler – tu znów ciekawe zjawisko – reprezentował w nauce barwy (kolejno) Szwajcarii, Rosji, Prus i znów Rosji: uczonych do akademii nauk danego kraju kupowano tak, jak dziś kupuje się piłkarzy do renomowanych klubów. W przypadku Eulera zakupów dokonywali kolejno: Piotr Wielki, Fryderyk Wielki i Katarzyna Wielka, a więc nie byle kto. Prace Eulera dotyczą właściwie wszystkiego – poza analizą matematyczną, algebrą czy teorią liczb mamy prace z teorii grafów, dynamiki tak punktu materialnego, jak i ciał sztywnych, prace z astronomii, hydrauliki, budowy okrętów, artylerii, optyki, muzyki. Jest nawet pierwsza książka popularnonaukowa, żeby było ciekawiej: dla dzieci – *Listy do księżniczki niemieckiej.*

Gdyby ktoś chciał porównać swoje, właściwie już prawie dwudziestopierwszowieczne umiejętności z umiejętnościami osiemnastowiecznego Eulera, niech spróbuje obliczyć, że siła kilkuletniego dziecka wystarczy, by zatrzymać nawet silny samochód za linkę w sytuacji, gdy jest ona kilkakrotnie (np. 5 razy) owinięta – ale nie zawiązana – wokół dostatecznie wytrzymałego słupka.

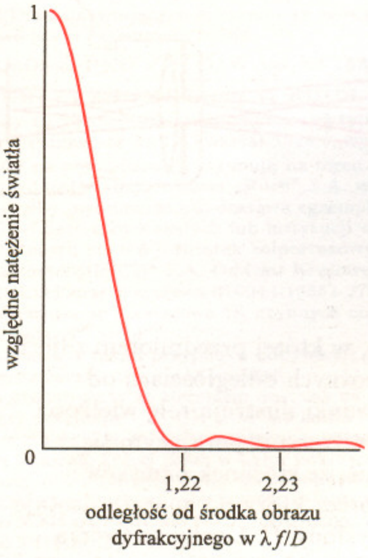
Efektowne przykłady mocy matematyki zostały uzyskane przez Gaussa. W noc sylwestrową 1800/1801 Piazzi odkrył niewielkie ruchome ciało niebieskie, pierwszą planetoidę. I została ona zagubiona, to znaczy po kilku dniach nikt nie umiał tej planetoidy na niebie odnaleźć. Gauss z notatek o jej kilkugodzinnej obserwacji odtworzył położenie Cerery (bo tak ją potem

Zwykle obiektywy fotograficzne są zespołami wielu soczewek; tu przyjmiemy, że obiektyw to pojedyncza, pozbawiona wad cienka soczewka o ogniskowej f.

Na rysunku 1 wybrano duży otwór względny przysłony, np. 2, a ostrość nastawiono na skoczka. Oznacza to, że obiektyw tak odsunięto od błony, aby światło dochodzące od pewnego punktu tej figury było skupione na błonie także w jednym punkcie. Dzięki temu odwzorowaniu punktu w punkt obraz jest ostry. Inaczej przedstawia się sprawa z królem lub pionem. Promienie wychodzące z punktu na powierzchni króla skupiają się przed błoną. Na filmie tworzą więc ślad w postaci krążka, a nie punktu. Podobny krążek na błonie utworzą promienie opuszczające punkt na powierzchni piona. Wskutek tego odwzorowania punktów w krążki obrazy króla i piona na filmie są nieostre. Można więc stwierdzić, że głębia ostrości jest za mała i nie objęła całej scenki.

Zwróćmy uwagę, od czego zależy wielkość powstałych krążków. Są one tym większe im większy jest kąt utworzony przez skrajne promienie przechodzące przez otwór w przysłonie i padające na błonę. Duży otwór przysłony z rysunku 1 dał więc ślady w postaci dużych krążków.

Zobaczmy, co się dzieje, gdy otwór zostaje zmniejszony. Rysunek 2 przedstawia te same figury, ale fotografowane z przysłoną 16. Widać, że wspomniany kąt utworzony przez skrajne promienie, zmniejszył się i stosownie do tego zmniejszyły się krążki będące odwzorowaniem punktów. Jeśli rozmiary tych krążków na odbitce są na tyle małe, że nie wywołują nieprzyjemnego wrażenia rozmazania obrazu przez nie utworzonego, to uznamy, że obraz ten jest ostry. Stwierdzimy wtedy, że głębia ostrości jest duża i obejmuje wszystkie trzy obiekty. Jest to kryterium dość subiektywne.
W zależności od wymagań stawianych odbitce przyjmuje się różne graniczne dopuszczalne średnice krążków na błonie: od 0,005 mm do 0,03 mm. Można rozważać też bardziej obiektywne kryterium wynikające z falowej natury światła. Wyidealizowanym modelem powstawania obrazu punktu jest dyfrakcja Fraunhofera na otworze kołowym. Rozkład natężenia światła ma centralne maksimum otoczone znacznie słabszymi pierścieniami (rys. 3).



Rys. 3

Średnica pierwszego minimum ograniczającego centralną plamę wynosi $c = 2{,}44\lambda f/D$. Grube oszacowanie uzyskane po przyjęciu, że $2{,}44\lambda = 1$ μm, daje średnicę plamki dyfrakcyjnej równą P mikrometrów. Dokładniejszy rachunek przeprowadzony dla $\lambda = 0{,}58$ μm (co odpowiada maksimum natężenia w widmie światła białego) i $f/D = P = 8$, daje $c = 11{,}3$ μm. Usprawiedliwieni falową naturą światła możemy więc dopuścić rozmycie geometryczne obrazu o porównywalnych rozmiarach. Jest to dość wymagające kryterium ostrości, lecz staje się ono łagodniejsze ze wzrostem liczby przysłony.

Po tych jakościowych wyjaśnieniach podamy wzory przydatne do obliczenia maksymalnej i minimalnej odległości, między którymi znajdujące się obiekty zostaną sfotografowane ostro.

Ich wyprowadzenie wymaga zastosowania równania soczewki $1/f = 1/x + 1/y$ oraz wykorzystania proporcjonalności boków odpowiednich trójkątów widocznych na rysunku 1. Tak więc odległość minimalna wyraża się wzorem

$$d_{\min} = \frac{df^2}{f^2 + Pc(d-f)}, \tag{1}$$

a maksymalna wzorem

$$d_{\max} = \frac{df^2}{f^2 - Pc(d-f)}, \tag{2}$$

gdzie c oznacza największą akceptowalną średnicę krążka nieostrości, a d – odległość, na jaką nastawiono ostrość aparatu. W praktyce mamy $d \gg f$ i wystarczy użycie wzorów przybliżonych

$$d_{\min} \approx \frac{df^2}{f^2 + Pcd}, \tag{3}$$

$$d_{\max} \approx \frac{df^2}{f^2 - Pcd}. \tag{4}$$

Jeśli d i f są porównywalne (co może mieć miejsce przy wykonywaniu makrofotografii, np. $d = 500$ mm, $f = 135$ mm), sensowne może być użycie wzorów dokładnych. W przypadku, gdy wzory na $d_{\max}$ dają wartość ujemną, plamka nieostrości jest mniejsza od założonej wartości c i należy przyjąć, że głębia ostrości sięga do nieskończoności.

Zdarzają się sytuacje, w których chcemy, aby głębia ostrości była jak największa i obejmowała zarówno obiekty bardzo oddalone (np. góry na horyzoncie, $d_{\max} = \infty$), jak i bliskie (np. kępę kwiatów, $d_{\min} = 2$ m). Warto wtedy nastawić obiektyw na pewną pośrednią odległość zwaną odległością hiperfokalną H. Głębia ostrości będzie się wtedy rozciągać od odległości minimalnej równej połowie odległości hiperfokalnej, $d_{\min} = H/2$, do nieskończoności, $d_{\max} = \infty$. Odległość hiperfokalną można obliczyć ze wzoru

$$H = f^2/Pc, \tag{5}$$

który łatwo znaleźć ze wzorów (1) lub (2). Załóżmy, że wspomniane kwiaty na tle gór fotografujemy obiektywem szerokokątnym o ogniskowej $f = 24$ mm i że dopuszczamy $c = 0{,}03$ mm. Przekształcony wzór (5) informuje, że zamiar się uda, gdy przysłona będzie wyrażać się liczbą większą niż 4,8, a więc np. 5,6. Dyfrakcyjną granicę rozdzielczości osiągniemy dla $P = 10$. Przy większych przysłonach H maleje, co oznacza, że coraz bliższe plany mogą być sfotografowane możliwie najostrzej.

Przytoczmy jeszcze wzór na wielkość głębi ostrości $g = d_{\max} - d_{\min}$

$$g = \frac{2dPc(d-f)}{f^2 - [Pc(d-f)/f]^2}, \tag{6}$$

który w przybliżeniu $d \gg f$ przyjmuje postać

$$g \approx \frac{2d^2Pc}{f^2 - (Pcd/f)^2}. \tag{7}$$

(Ujemny wynik liczbowy oznacza ostrość od $d_{\min}$ do ∞.) Inne przybliżenie, warte stosowania w makrofotografii, słuszne gdy $f/Pc \gg d - f$, daje wzór

$$g = 2(k+1)kPc, \tag{8}$$

gdzie k jest stosunkiem rozmiarów przedmiotu do rozmiarów obrazu na błonie. W tym przybliżeniu g nie zależy od ogniskowej, jeśli tylko obraz zachowuje tę samą wielkość. W wielu dziedzinach makrofotografii warto posługiwać się obiektywem o nieco dłuższej ogniskowej niż standardowy (np. 80–135 mm), co pozwala utrzymać wygodną zwiększoną odległość od obiektu i zmniejszyć udział tła na zdjęciu, a nie ma wpływu na głębię ostrości.

nazwano) tak, że dała się ona odszukać. Podobną sprawnością popisał się półtora roku później (tym razem zaginęła planetoida Pallas odkryta przez Olbersa). Z tego rodzaju powodów najwyższa międzynarodowa nagroda astronomiczna jest imienia Gaussa. Ale gauss to również jednostka magnetyzmu. Od Gaussa pochodzi telegraf i używany do dzisiaj system map wojskowych. Doświadczalnicy będą mu zawsze wdzięczni za teorię błędów pomiarowych itd., itp.

Największą sławę przyniosło jednak matematyce wojsko. Jak wiadomo, od 1789 roku (czyli od rewolucji) do 1815 (czyli Waterloo) Francja toczyła – przez większą część czasu zwycięskie – wojny z całą Europą. Było to zdumiewające, że kraj, w którym dokonywała się rewolucja i zasadnicze zmiany wszystkiego były chlebem powszednim, miał tak sprawną armię i tak sprawne dla tej armii zaplecze przemysłowe, iż dawała radę wiele liczniejszym armiom ustabilizowanych państw. To, że w końcu przegrała, nie miało tu istotnego znaczenia. Dużym problemem dla obradujących na kongresie w Wiedniu była odpowiedź na pytanie, jak doszło do tego „wypadku przy pracy". Odpowiedzi szukano we właściwym miejscu: zdecydowali o tym oficerowie armii i oficerowie przemysłu, czyli inżynierowie. Jeśli oni byli lepsi, to znaczy, że lepiej byli kształceni. Już pięćdziesiąt lat wcześniej Fryderyk Wielki wprowadził w Prusach i księstwach satelitarnych obowiązkowe i darmowe szkolnictwo podstawowe, gdyż twierdził, iż żołnierz umiejący czytać, pisać i rachować jest lepszym żołnierzem. Rewolucyjna Francja jakobinów od razu zadeklarowała powszechne szkolnictwo podstawowe i średnie, ale z tego – po likwidacji jakobinów – nic nie wyszło. Rozwinęły się natomiast bujnie szkoły wyższe, początkowo głównie oficerskie. Stało się tak, ponieważ jeszcze za Ludwika XVI w szkołach oficerskich szukała zatrudnienia duża część intelektualnej opozycji. Sprawy szkolnictwa wyższego połączone z kierowaniem przemysłem – cóż na to dzisiejsi władcy Rzeczpospolitej? – rewolucja powierzyła (i – o dziwo – nie zmieniano tego mimo zmian ekip rządzących) Gaspardowi Monge'owi, matematykowi, i Claude'owi Louisowi de Bertholletowi, chemikowi. Z tej racji, jak też z uwagi na zaangażowanie przez nich do reformy szkolnictwa matematyków tej klasy, co Lagrange i Laplace, matematyki w szkolnictwie wojskowym i inżynierskim było bardzo dużo. Nawiasem mówiąc, łączenie