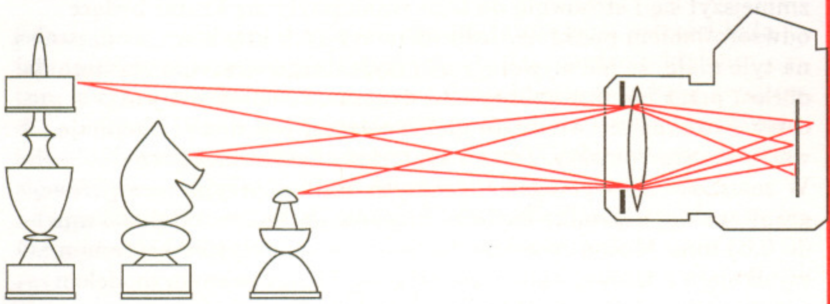
Głębia ostrości

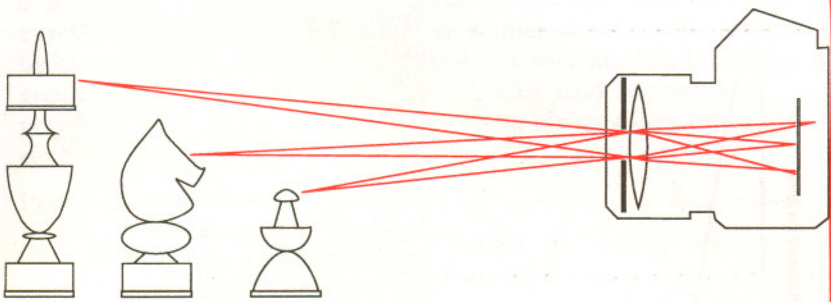
Grzegorz DERFEL

Operowanie głębią ostrości należy do podstawowych środków, jakimi dysponuje fotograf w celu osiągnięcia ekspresji zdjęcia. Mała głębia ostrości pozwala wydzielić fotografowany obiekt z tła, które w przeciwnym razie rozpraszałoby uwagę widza. Zdarzają się też sytuacje, w których pożądana jest jak największa głębia ostrości, niezbędna do wyraźnego przedstawienia obiektów położonych w różnych planach.

W artykule wyjaśnimy po pierwsze, dzięki czemu istnieje głębia ostrości, to jest dlaczego można uznać za ostro zobrazowane przedmioty leżące w pewnym (czasem bardzo szerokim) przedziale odległości od aparatu, a nie tylko te, które leżą w ściśle określonym planie, na który nastawiony jest obiektyw. Po drugie, wykażemy, jakie czynniki mają wpływ na szerokość tego przedziału. I po trzecie, przedstawimy sposoby obliczania głębi ostrości w zależności od ogniskowej obiektywu, przysłony i odległości do fotografowanego obiektu. Do wymienionych zagadnień będą zastosowane prawa optyki geometrycznej, które są dobrym przybliżeniem w praktyce fotograficznej.



Rys. 1



Rys. 2

Rysunki 1 i 2 przedstawiają sytuację, w której przedmiotem zdjęcia są trzy figury szachowe położone w różnych odległościach od aparatu: król, skoczek i pion. Oba rysunki ilustrują rolę wielkości otworu względnego przysłony. Czytelnikom nie parającym się fotografią pomocne będzie wyjaśnienie, że stosunek ogniskowej obiektywu f do średnicy otworu D, przez który do aparatu dostaje się światło, oznaczany jest liczbą przysłony P. Liczby te tworzą standardowo ciąg: 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22;... począwszy od otworu największego do najmniejszego. Ponieważ kolejne liczby ciągu oznaczają średnice różniące się w przybliżeniu o czynnik $\sqrt{2}$, a oświetlenie błony jest proporcjonalne do $(D/f)^2$, to zmienia się ono dwukrotnie przy zmianie przysłony o jedną „działkę".

Przygody matematyki wśród ludzi (IV)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Całkowite zwycięstwo

Marek KORDOS

Podstawową zaletą matematyki dla starożytnych filozofów była pewność jej stwierdzeń. Żadna dyscyplina nauki tak ongiś, jak i dziś nie może się pochwalić tak niewątpliwą, niepodważalną prawdziwością swoich orzeczeń. Zaleta ta została matematyce dana przez greckich twórców jej kanonów, kanonów uzyskiwania jej twierdzeń, kanonów prowadzenia rozumowań.

Dla ludzi XVII wieku główny walor matematyki znajdował się gdzie indziej – matematyka stosowała się do każdej właściwie dyscypliny ludzkiej działalności, przynosząc każdej z nich nowe osiągnięcia praktyczne. Bardzo szeroko do dziś jest dyskutowana *zdumiewająca stosowalność matematyki w praktyce*. Istotnie – jest czemu się dziwić. Okazuje się bowiem, że stworzone na drodze intelektualnej spekulacji Starożytnych zasady, podstawy matematyki, zawierają istotnie to, co w nich widzieć chcieli pitagorejczycy: najgłębszą prawdę o Wszechświecie i zamieszkujących go ludziach. Pomysł, że nasi przodkowie sprzed 2,5 tysiąca lat umieli uchwycić to najistotniejsze, jest dość szokujący. Wymyślono dla uzasadnienia tego zjawiska wiele różnorodnych objaśnień. Sama sprawa skutecznej stosowalności matematyki uważana jest jednak ciągle za otwartą.

Niemniej, niezależnie od tego, czy umiemy przyczynę tego wyjaśnić, czy też nie, od siedemnastego wieku następuje (aż po wiek dwudziesty) bezustanna ekspansja metod matematycznych we wszystkich gałęziach ludzkiego działania. Najbardziej spektakularne jest przenoszenie nowych dyscyplin do matematyki. Zdanie to wymaga wyjaśnienia. Otóż powstające w XVII wieku akademie nauk miały w zasadzie dwa wydziały: matematykę i fizykę. Do matematyki zaliczano te wszystkie dziedziny wiedzy, w których dopracowano się bezwzględnie ścisłych metod pozyskiwania prawd. Była więc w matematyce np. geometria, była od początku istnienia akademii optyka geometryczna. „Reszta” – jeszcze na początku XIX wieku np. elektryczność, magnetyzm, fizjologia, mineralogia – była w fizyce. Znamy konkretną datę przeniesienia mechaniki teoretycznej z fizyki do matematyki: jest to 1788 rok – osiem lat temu obchodzono nawet dwóchsetlecie tego wydarzenia (data ta to rok wydania *Mechaniki analitycznej* Lagrange'a). O surowości wymagań przy kwalifikowaniu do dyscyplin matematycznych może świadczyć fakt, że rezultaty Galileusza, Newtona, Bernoulliego czy d'Alemberta nie były dla takiego awansu mechaniki wystarczające.

Najbardziej spektakularnie matematyzował rozmaite dyscypliny do dziś nie mający sobie równych w płodności i wszechstronności Leonhard Euler (występuje zresztą z tego powodu w księdze Guinnessa). Euler – tu znów ciekawe zjawisko – reprezentował w nauce barwy (kolejno) Szwajcarii, Rosji, Prus i znów Rosji: uczonych do akademii nauk danego kraju kupowano tak, jak dziś kupuje się piłkarzy do renomowanych klubów. W przypadku Eulera zakupów dokonywali kolejno: Piotr Wielki, Fryderyk Wielki i Katarzyna Wielka, a więc nie byle kto. Prace Eulera dotyczą właściwie wszystkiego – poza analizą matematyczną, algebrą czy teorią liczb mamy prace z teorii grafów, dynamiki tak punktu materialnego, jak i ciał sztywnych, prace z astronomii, hydrauliki, budowy okrętów, artylerii, optyki, muzyki. Jest nawet pierwsza książka popularnonaukowa, żeby było ciekawiej: dla dzieci – *Listy do księżniczki niemieckiej*.

Gdyby ktoś chciał porównać swoje, właściwie już prawie dwudziestopierwszowieczne umiejętności z umiejętnościami osiemnastowiecznego Eulera, niech spróbuje obliczyć, że siła kilkuletniego dziecka wystarczy, by zatrzymać nawet silny samochód za linkę w sytuacji, gdy jest ona kilkakrotnie (np. 5 razy) owinięta – ale nie zawiązana – wokół dostatecznie wytrzymałego słupka.

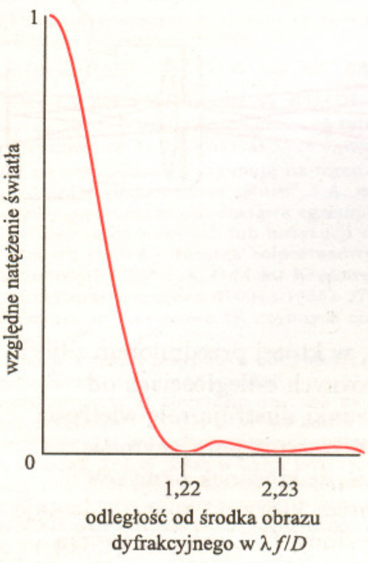
Efektowne przykłady mocy matematyki zostały uzyskane przez Gaussa. W noc sylwestrową 1800/1801 Piazzi odkrył niewielkie ruchome ciało niebieskie, pierwszą planetoidę. I została ona zagubiona, to znaczy po kilku dniach nikt nie umiał tej planetoidy na niebie odnaleźć. Gauss z notatek o jej kilkugodzinnej obserwacji odtworzył położenie Cerery (bo tak ją potem

Zwykle obiektywy fotograficzne są zespołami wielu soczewek; tu przyjmiemy, że obiektyw to pojedyncza, pozbawiona wad cienka soczewka o ogniskowej f.

Na rysunku 1 wybrano duży otwór względny przysłony, np. 2, a ostrość nastawiono na skoczka. Oznacza to, że obiektyw tak odsunięto od błony, aby światło dochodzące od pewnego punktu tej figury było skupione na błonie także w jednym punkcie. Dzięki temu odwzorowaniu punktu w punkt obraz jest ostry. Inaczej przedstawia się sprawa z królem lub pionem. Promienie wychodzące z punktu na powierzchni króla skupiają się przed błoną. Na filmie tworzą więc ślad w postaci krążka, a nie punktu. Podobny krążek na błonie utworzą promienie opuszczające punkt na powierzchni piona. Wskutek tego odwzorowania punktów w krążki obrazy króla i piona na filmie są nieostre. Można więc stwierdzić, że głębia ostrości jest za mała i nie objęła całej scenki.

Zwróćmy uwagę, od czego zależy wielkość powstałych krążków. Są one tym większe im większy jest kąt utworzony przez skrajne promienie przechodzące przez otwór w przysłonie i padające na błonę. Duży otwór przysłony z rysunku 1 dał więc ślady w postaci dużych krążków.

Zobaczmy, co się dzieje, gdy otwór zostaje zmniejszony. Rysunek 2 przedstawia te same figury, ale fotografowane z przysłoną 16. Widać, że wspomniany kąt utworzony przez skrajne promienie, zmniejszył się i stosownie do tego zmniejszyły się krążki będące odwzorowaniem punktów. Jeśli rozmiary tych krążków na odbitce są na tyle małe, że nie wywołują nieprzyjemnego wrażenia rozmazania obrazu przez nie utworzonego, to uznamy, że obraz ten jest ostry. Stwierdzimy wtedy, że głębia ostrości jest duża i obejmuje wszystkie trzy obiekty. Jest to kryterium dość subiektywne. W zależności od wymagań stawianych odbitce przyjmuje się różne graniczne dopuszczalne średnice krążków na błonie: od 0,005 mm do 0,03 mm. Można rozważać też bardziej obiektywne kryterium wynikające z falowej natury światła. Wyidealizowanym modelem powstawania obrazu punktu jest dyfrakcja Fraunhofera na otworze kołowym. Rozkład natężenia światła ma centralne maksimum otoczone znacznie słabszymi pierścieniami (rys. 3).



Rys. 3

Średnica pierwszego minimum ograniczającego centralną plamę wynosi $c = 2{,}44\lambda f/D$. Grube oszacowanie uzyskane po przyjęciu, że $2{,}44\lambda = 1\ \mu m$, daje średnicę plamki dyfrakcyjnej równą P mikrometrów. Dokładniejszy rachunek przeprowadzony dla $\lambda = 0{,}58\ \mu m$ (co odpowiada maksimum natężenia w widmie światła białego) i $f/D = P = 8$, daje $c = 11{,}3\ \mu m$. Usprawiedliwieni falową naturą światła możemy więc dopuścić rozmycie geometryczne obrazu o porównywalnych rozmiarach. Jest to dość wymagające kryterium ostrości, lecz staje się ono łagodniejsze ze wzrostem liczby przysłony.

Po tych jakościowych wyjaśnieniach podamy wzory przydatne do obliczenia maksymalnej i minimalnej odległości, między którymi znajdujące się obiekty zostaną sfotografowane ostro.

Ich wyprowadzenie wymaga zastosowania równania soczewki $1/f = 1/x + 1/y$ oraz wykorzystania proporcjonalności boków odpowiednich trójkątów widocznych na rysunku 1. Tak więc odległość minimalna wyraża się wzorem

$$d_{\min} = \frac{df^2}{f^2 + Pc(d-f)}, \tag{1}$$

a maksymalna wzorem

$$d_{\max} = \frac{df^2}{f^2 - Pc(d-f)}, \tag{2}$$

gdzie c oznacza największą akceptowalną średnicę krążka nieostrości, a d – odległość, na jaką nastawiono ostrość aparatu. W praktyce mamy $d \gg f$ i wystarczy użycie wzorów przybliżonych

$$d_{\min} \approx \frac{df^2}{f^2 + Pcd}, \tag{3}$$

$$d_{\max} \approx \frac{df^2}{f^2 - Pcd}. \tag{4}$$

Jeśli d i f są porównywalne (co może mieć miejsce przy wykonywaniu makrofotografii, np. $d = 500$ mm, $f = 135$ mm), sensowne może być użycie wzorów dokładnych. W przypadku, gdy wzory na $d_{\max}$ dają wartość ujemną, plamka nieostrości jest mniejsza od założonej wartości c i należy przyjąć, że głębia ostrości sięga do nieskończoności.

Zdarzają się sytuacje, w których chcemy, aby głębia ostrości była jak największa i obejmowała zarówno obiekty bardzo oddalone (np. góry na horyzoncie, $d_{\max} = \infty$), jak i bliskie (np. kępę kwiatów, $d_{\min} = 2$ m). Warto wtedy nastawić obiektyw na pewną pośrednią odległość zwaną odległością hiperfokalną H. Głębia ostrości będzie się wtedy rozciągać od odległości minimalnej równej połowie odległości hiperfokalnej, $d_{\min} = H/2$, do nieskończoności, $d_{\max} = \infty$. Odległość hiperfokalną można obliczyć ze wzoru

$$H = f^2/Pc, \tag{5}$$

który łatwo znaleźć ze wzorów (1) lub (2). Załóżmy, że wspomniane kwiaty na tle gór fotografujemy obiektywem szerokokątnym o ogniskowej $f = 24$ mm i że dopuszczamy $c = 0{,}03$ mm. Przekształcony wzór (5) informuje, że zamiar się uda, gdy przysłona będzie wyrażać się liczbą większą niż 4,8, a więc np. 5,6. Dyfrakcyjną granicę rozdzielczości osiągniemy dla $P = 10$. Przy większych przysłonach H maleje, co oznacza, że coraz bliższe plany mogą być sfotografowane możliwie najostrzej.

Przytoczmy jeszcze wzór na wielkość głębi ostrości $g = d_{\max} - d_{\min}$

$$g = \frac{2dPc(d-f)}{f^2 - [Pc(d-f)/f]^2}, \tag{6}$$

który w przybliżeniu $d \gg f$ przyjmuje postać

$$g \approx \frac{2d^2Pc}{f^2 - (Pcd/f)^2}. \tag{7}$$

(Ujemny wynik liczbowy oznacza ostrość od $d_{\min}$ do ∞.) Inne przybliżenie, warte stosowania w makrofotografii, słuszne gdy $f/Pc \gg d - f$, daje wzór

$$g = 2(k+1)kPc, \tag{8}$$

gdzie k jest stosunkiem rozmiarów przedmiotu do rozmiarów obrazu na błonie. W tym przybliżeniu g nie zależy od ogniskowej, jeśli tylko obraz zachowuje tę samą wielkość. W wielu dziedzinach makrofotografii warto posługiwać się obiektywem o nieco dłuższej ogniskowej niż standardowy (np. 80–135 mm), co pozwala utrzymać wygodną zwiększoną odległość od obiektu i zmniejszyć udział tła na zdjęciu, a nie ma wpływu na głębię ostrości.

nazwano) tak, że dała się ona odszukać. Podobną sprawnością popisał się półtora roku później (tym razem zaginęła planetoida Pallas odkryta przez Olbersa). Z tego rodzaju powodów najwyższa międzynarodowa nagroda astronomiczna jest imienia Gaussa. Ale gauss to również jednostka magnetyzmu. Od Gaussa pochodzi telegraf i używany do dzisiaj system map wojskowych. Doświadczalnicy będą mu zawsze wdzięczni za teorię błędów pomiarowych itd., itp.

Największą sławę przyniosło jednak matematyce wojsko. Jak wiadomo, od 1789 roku (czyli od rewolucji) do 1815 (czyli Waterloo) Francja toczyła – przez większą część czasu zwycięskie – wojny z całą Europą. Było to zdumiewające, że kraj, w którym dokonywała się rewolucja i zasadnicze zmiany wszystkiego były chlebem powszednim, miał tak sprawną armię i tak sprawne dla tej armii zaplecze przemysłowe, iż dawała radę wiele liczniejszym armiom ustabilizowanych państw. To, że w końcu przegrała, nie miało tu istotnego znaczenia. Dużym problemem dla obradujących na kongresie w Wiedniu była odpowiedź na pytanie, jak doszło do tego „wypadku przy pracy”. Odpowiedzi szukano we właściwym miejscu: zdecydowali o tym oficerowie armii i oficerowie przemysłu, czyli inżynierowie. Jeśli oni byli lepsi, to znaczy, że lepiej byli kształceni. Już pięćdziesiąt lat wcześniej Fryderyk Wielki wprowadził w Prusach i księstwach satelitarnych obowiązkowe i darmowe szkolnictwo podstawowe, gdyż twierdził, iż żołnierz umiejący czytać, pisać i rachować jest lepszym żołnierzem. Rewolucyjna Francja jakobinów od razu zadeklarowała powszechne szkolnictwo podstawowe i średnie, ale z tego – po likwidacji jakobinów – nic nie wyszło. Rozwinęły się natomiast bujnie szkoły wyższe, początkowo głównie oficerskie. Stało się tak, ponieważ jeszcze za Ludwika XVI w szkołach oficerskich szukała zatrudnienia duża część intelektualnej opozycji. Sprawy szkolnictwa wyższego połączone z kierowaniem przemysłem – cóż na to dzisiejsi władcy Rzeczpospolitej? – rewolucja powierzyła (i – o dziwo – nie zmieniano tego mimo zmian ekip rządzących) Gaspardowi Monge'owi, matematykowi, i Claude'owi Louisowi de Bertholletowi, chemikowi. Z tej racji, jak też z uwagi na zaangażowanie przez nich do reformy szkolnictwa matematyków tej klasy, co Lagrange i Laplace, matematyki w szkolnictwie wojskowym i inżynierskim było bardzo dużo. Nawiasem mówiąc, łączenie kierowania szkolnictwem i przemysłem oraz powierzanie tej funkcji matematykowi utrzymało się we Francji aż do wojny francusko-pruskiej.

Dostrzeżenie dużego udziału matematyki w szkolnictwie wojskowym i technicznym i powiązanie tego z sukcesami armii stało się obowiązującą doktryną. Wszystkie zwycięskie państwa, a więc tak Anglia, jak nasi trzej rozbiorcy: Rosja, Prusy i Austria, uczyniły z nauczania matematyki sprawę strategiczną i to z tej racji nauczyciel matematyki stał się najważniejszy w szkole, a postawiona przez niego dwójka zaporą nie do przebycia. Prawie aż po dzień dzisiejszy. Powrócę do tego następnym razem.

Teraz jeszcze o determinizmie i losowości – doktrynie światopoglądowej praktycznie wszystkich dziewiętnastowiecznych użytkowników matematyki. Największym bodaj wydarzeniem wydawniczym przełomu XVIII i XIX wieku była *Mechanika nieba* Pierre'a Simona Laplace'a – ogromne pięciotomowe dzieło nie tylko o niebie, ale przede wszystkim o nowoczesnych metodach analizy matematycznej. Sam Laplace nie budził sympatii – potrafił zmieniać swoją przynależność polityczną z niewiarygodną szybkością. Jednak właśnie wypowiedzi tego, pogardzanego za brak kręgosłupa ideowego, uczonego wyznaczyły horyzonty światopoglądowe ludzi nauki i techniki. Laplace głosił, że gdyby mieć dostatecznie wiele danych o aktualnym stanie świata i gdyby móc dostatecznie szybko obliczać, to można by się dowiedzieć wszystkiego tak o przeszłości, jak i przyszłości (choć dziś jest tak jedynie w astronomii – dodawał). Taki pogląd nazywa się determinizmem. Nie jest on całościowo do obrony, bo przecież trudno sobie wyobrazić, jakby to było, gdybym wczoraj obliczył sobie, co powiem Państwu za minutę – dlaczego nie mógłbym (na złość) powiedzieć czegoś innego? Determinizm nie daje się pogodzić z żadną koncepcją etyczną czy religijną. A jednak jego podstawowa zaleta – oddzielenie pracy uczonego od wszelkich koniunkturalnych wpływów (i to mówił Laplace!) była tak nęcąca, że praktycznie wszyscy uczeni przyrodnicy ubiegłego stulecia głosili determinizm jako swoją ideologię, jako sztandar niezależności nauki. Determinizm uzupełniany był rachunkiem prawdopodobieństwa – to znów z dzieła Laplace'a *Rachunkowa teoria prawdopodobieństwa*. Prawdopodobieństwo ma stanowić protezę wiedzy pewnej

Przypadkowa prawidłowość czy prawo przyrody?

Tomasz KWAST

Od tzw. nauk ścisłych oczekuje sie na ogół, że w każdej sytuacji dostarczą sposobu na przewidzenie (obliczenie) wyniku doświadczenia czy zjawiska, a jeżeli jest to niewykonalne dziś, to zapewne wkrótce ktoś taki sposób wynajdzie. Otóż niekoniecznie! Są mianowicie zjawiska i doświadczenia, których wyniki są zasadniczo nieprzewidywalne. Nie należy do nich tradycyjny rzut monetą, gdyby bowiem znać dokładnie siły działające na nią w czasie rzutu, opór powietrza itd., to można by przewidzieć, co wypadnie; tu wynik jest nie do przewidzenia z powodu braku pełnej informacji o zjawisku. Prawdę mówiąc, nawet gdyby taka informacja istniała, to nie wiadomo by było, co z nią zrobić. Są jednak takie zjawiska, o których wiadomo, że nigdy przewidywalne nie będą, np. w którym momencie rozpadnie się konkretny atom w promieniotwórczej próbce. O rozpadzie promieniotwórczym prawa przyrody mówią, że jeżeli nietrwałych atomów jest dużo, to w określonym czasie rozpadnie się ich połowa, nie wiadomo natomiast – które. I nigdy tego nie będzie wiadomo! Prawa przyrody przewidują tu wynik tylko statystyczny. Na tym przykładzie widać, że nie każda przypadkowość oznacza brak prawa przyrody.

Jest też odwrotnie: nie każda prawidłowość jest od razu prawem przyrody. Znamy bez liku rozmaitych wzorów empirycznych, a chyba jednym z najsłynniejszych jest reguła Titiusa–Bodego (orzeka ona, że promienie orbit kolejnych planet opisuje wzór $r_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$, gdzie $n = -\infty, 1, 2, 3, \ldots$). Jej sukcesy były swego czasu zdumiewające: znaleziono planetoidy w miejscu, gdzie brakowało planety, pomogła w odkryciu Neptuna, choć potem okazało się, że akurat Neptun do niej nie pasuje. Podobne potęgowe wzory można zresztą znaleźć dla promieni orbit satelitów Jowisza czy Saturna. Choć zgodność takiej „teorii" z obserwacjami jest zastanawiająca, nie zmienia to faktu, że reguła Titiusa–Bodego jest tylko zależnością empiryczną, a nie prawem przyrody jak np. którekolwiek z praw Keplera.

No to jak odróżnić prawo przyrody od zależności empirycznej? Pytanie nie jest banalne, bo przecież np. Balmer swoje wzory na długości fal linii wodorowych znalazł metodą prób i błędów, a z czasem okazało się, że istotnie tak ma być i że wynika to z głębszych przyczyn, z praw bardziej fundamentalnych. Tak samo było w przypadku Keplera: on doszedł do swoich praw szukając harmonii w Układzie Słonecznym, przy czym, jak wiemy, robił to w sposób wręcz daleki od naukowego. I tak samo dopiero później okazało się, że również one wynikają ściśle z prawa bardziej podstawowego, mianowicie z prawa grawitacji. Można więc zaryzykować twierdzenie, że nowa prawidłowość jest prawem przyrody, jeżeli wynika z innych, bardziej ogólnych praw przyrody. Tylko że z pewnością nie znamy wszystkich fundamentalnych praw przyrody, nie wiemy, jak je znajdywać, ile ich jeszcze mamy odkryć. Podejrzewam, że gdyby to było wiadome, można by badanie przyrody powierzyć automatom. Tymczasem nie zanosi się na to i to wcale nie dlatego, że człowiek nie chce okazać się zbędnym. Jest bowiem gorzej: odkrycie nowego prawa fundamentalnego jest na ogół okupione obaleniem prawa uważanego dotychczas za fundamentalne, a tego nie pojmie żadna maszyna.

Patrz w niebo

Co jakiś czas przez tzw. szeroki ogół przechodzi fala zainteresowania niebem spowodowana domniemanym „ustawieniem planet na jednej linii" i związanymi z tym obawami. Kiedyś nawet telefonował ktoś do mnie do Obserwatorium Warszawskiego pytając, o której konkretnie godzinie planety tak się ustawią, bo on chciałby wtedy opuścić dom i przeczekać kataklizm na otwartej przestrzeni.

Tymczasem siłę oddziaływania planet na Ziemię każdy może z łatwością obliczyć. Bezpośrednie przyspieszenie Ziemi wywołane przyciąganiem przez planetę o masie M z odległości r wynosi, oczywiście, GM/r^2. Masy niektórych planet są wprawdzie znacznie większe od masy Ziemi, ale planety te dzielą od Ziemi odległości wyrażające się setkami milionów kilometrów. Wszystkie te przyspieszenia okazują się bardzo małe w porównaniu z przyspieszeniem Ziemi wywołanym przez Słońce, a ono przecież rządzi ruchem Ziemi. No to może pływowe działanie planet jest niebezpieczne? W tym przypadku mechanika mówi, że różnica przyspieszeń grawitacyjnych na końcach obiektu (tu: Ziemi) o rozmiarach R wywołana obecnością innej planety o masie M w odległości r wynosi GMR/r^3. Ta właśnie różnica przyspieszeń mogłaby rozerwać Ziemię, gdyby była dostatecznie duża. Ale znowu prosty rachunek przekonuje, że najsilniejsze działanie pływowe na Ziemię wywiera Księżyc, bo jest najbliżej, powodując zresztą raptem kilkumetrowe podnoszenie się wody w oceanach. Inne planety zupełnie tu się nie liczą, nawet gdyby połączyły swoje wysiłki i ustawiły się na jednej linii.

A tak naprawdę, dokładne ustawienie się planet w jednej linii nie daje się przewidzieć. Można jedynie określać szanse znalezienia się planet w jakimś kącie, gdyby je obserwować np. ze Słońca. W dodatku, im więcej planet dopuścić do tej konkurencji, tym mniejsza jest szansa znalezienia ich w małym kącie. W czasach nowożytnych planety grupowały się kilkakrotnie w kącie liczącym kilkadziesiąt stopni:

wrzesień 1126 r.	– 69°,
październik 1304 r.	– 59°,
listopad 1483 r.	– 58°,
styczeń 1665 r.	– 45°,
styczeń 1844 r.	– 86°,
listopad 1982 r.	– 64°.

W zasadzie poszukiwanie takich dziwnych konfiguracji planet jest w dzisiejszych czasach proste. Całkujemy mianowicie równania ruchu planet przy czasie biegnącym wstecz i komputer na życzenie znajduje, co trzeba. Tyle że rzadko to się robi, bo na ogół nie jest to specjalnie ciekawe. Jednak przynajmniej dwa takie przypadki okazały się bardzo ciekawe i brzemienne w skutki. Ustalono, chyba dość pewnie, że Gwiazdą Betlejemską mogła być właśnie koniunkcja Wenus i Jowisza, która nastąpiła bardzo blisko Regulusa (alfy Lwa). Na krótko przed początkiem – teraz tak przez nas nazywanej – nowej ery to rzadkie zjawisko zapowiedziało przyjście Mesjasza i – przy okazji – dało początek współczesnej rachubie czasu.

Drugi analogiczny przełom nastąpił, jak się wydaje, dawno w Chinach. Próby ustalenia, co było początkiem starożytnego chińskiego kalendarza (wykorzystującego okresowości w ruchach planet) doprowadziły do wyniku, że była nim data, we współczesnym zapisie, 5 marca 1953 p.n.e. (dzień może nie jest na sto procent pewny). Obliczenia przeprowadzone w JPL (Jet Propulsion Laboratory, Kalifornia) potwierdziły informację zawartą w dawnym chińskim zapisie, że tego dnia o wschodzie Słońca nad wschodnim horyzontem widać było Księżyc w fazie 2 dni przed nowiem oraz **wszystkie** pięć planet widocznych gołym okiem. Każda planeta od sąsiedniej była odległa nie więcej niż o 3°, a całe zjawisko zbiegło się jeszcze dość blisko z początkiem wiosny. Była to podobno najbardziej zwarta konfiguracja planet w ciągu ostatnich 6000 lat. Tak więc „ustawienie planet na jednej linii" wprawdzie trzęsień ziemi nie powoduje, lecz znaczenie dla kultury miewa ogromne.

Tomasz KWAST

w sytuacji, gdzie wymagana przez determinizm baza danych bądź moc obliczeniowa jest nie do osiągnięcia. Potencjalnie możemy wiedzieć wszystko na pewno, chwilowo tu i ówdzie musimy podpierać się prawdopodobieństwem.

Taka była matematyka wtedy, gdy powszechnie za królową nauk była uważana. I gdy istotnie ofiarowała ludzkości postęp techniczny z niczym wcześniejszym nie mogący się równać. Być królową to sztuka – trzeba bardzo uważać, żeby się w głowie nie przewróciło. W przypadku matematyki jednak uważano za mało – i o tym następnym razem.

Rozwiązanie zadania F 435. Równanie ruchu cząstki

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

można zapisać w postaci

$$\frac{d\eta}{dt} - i\omega\eta = ae^{i\omega t},$$

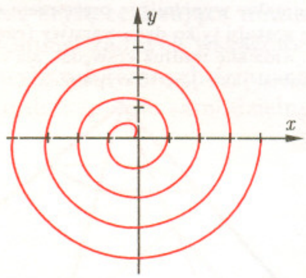
gdzie $\eta = v_x + iv_y$, $a = \frac{qE}{m}$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\eta(t) = ate^{i\omega t}.$$

Całkując ją otrzymujemy

$$(x+iy)(t) = \frac{a}{\omega^2}\left[(1-i\omega t)e^{i\omega t} - 1\right].$$

Jest to linia spiralna na płaszczyźnie (x, y), punkty na osiach są odległe o $\frac{2\pi a}{\omega^2}$, współrzędna z-owa cząstki nie zmienia się.



Energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}m|\eta|^2 = \frac{1}{2}mq^2E^2t^2.$$

Rozwiązanie zadania F 436. Na podstawie drugiego prawa Keplera (zasada zachowania momentu pędu) możemy napisać:

$$Vb = ua(1+e) = va(1-e),$$

gdzie e jest mimośrodem elipsy. Dostajemy stąd

$$V^2b^2 = uva^2(1-e^2).$$

Ponieważ $1 - e^2 = b^2/a^2$, dostajemy

$$V = \sqrt{uv}.$$

Jest to jeszcze jeden przykład średniej geometrycznej w fizyce. O różnych rodzajach średnich w problemach fizycznych pisaliśmy w *Małej Delcie* (*Delta* 6/1994).