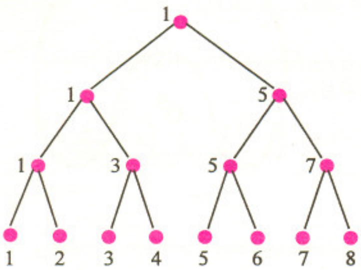
Jak wyłonić zwycięzcę?

Ile meczów trzeba rozegrać, żeby z 32 drużyn piłkarskich wyłonić najlepszą? Gdy rozgrywki prowadzone są systemem pucharowym, wystarcza $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ meczów. Dzielimy drużyny na pary, następnie zwycięzców 16 meczów pierwszej rundy znów dzielimy na pary, które rozgrywają ze sobą 8 meczów; ich zwycięzcy rozgrywają następnie cztery mecze ćwierćfinałowe, potem podczas dwóch półfinałów wyłania się uczestników finału, i wreszcie mecz finałowy decyduje, kto wygrywa turniej.

Jeśli turniej chcemy od początku rozgrywać systemem pucharowym, to liczba k startujących drużyn musi być potęgą dwójki 2^{ℓ} (dlatego, żeby po każdej rundzie można było podzielić drużyny na pary). Do wyłonienia zwycięzcy potrzeba wtedy $k-1$ meczów, bo $2^{\ell-1} + \cdots + 4 + 2 + 1 = 2^{\ell} - 1$.

Jeśli liczba startujących drużyn k nie jest potęgą dwójki, to dla pewnego $\ell \in \mathbf{N}$ mamy $2^{\ell} < k < 2^{\ell+1}$. Jeśli przydzielimy $w = 2^{\ell+1} - k$ wolnych losów, to w pierwszej rundzie rozegranych zostanie $(k-w):2 = k - 2^{\ell}$ meczów, a w drugiej rundzie będziemy mieć $(2^{\ell+1} - k) + (k - 2^{\ell}) = 2^{\ell}$ drużyn. Dalej można grać standardowym systemem pucharowym – po kolejnych $2^{\ell} - 1$ meczach będzie wiadomo, kto jest najlepszy. Zauważmy, że do wyłonienia zwycięzcy potrzeba o jeden mecz mniej, niż jest startujących drużyn, bo $(k - 2^{\ell}) + (2^{\ell} - 1) = k - 1$. Można zresztą było nie trudzić się rachunkiem, bo wiadomo, że w trakcie całego turnieju $k-1$ drużyn musi przegrać swoje mecze, a przegrywa się w systemie pucharowym tylko raz.

Dla porównania, w systemie *każdy z każdym* meczów byłoby $k(k-1)/2$ (bo tyle jest różnych par drużyn). W przypadku 32 drużyn czas rozgrywek wydłużyłby się więc 16 razy. Mała liczba meczów potrzebnych do wyłonienia zwycięzcy, połączona z dużą dawką emocji (każdy mecz kończy się czyimś nieodwracalnym dramatem), jest niewątpliwą zaletą systemu pucharowego.



System pucharowy ma także wady. Wprawdzie zwycięzca jest wyłaniany dość obiektywnie (jeśli któraś drużyna jest bezapelacyjnie najlepsza, to wygra swoje mecze, a więc i cały turniej). Jednakże sprawa drugiego miejsca jest już mocno wątpliwa, finalistą w systemie pucharowym może bowiem zostać byle szarak ze środka stawki. Dla przykładu, gdy drużyn jest 8, to można – przy odpowiednim początkowym zestawieniu par, rzecz jasna – być gorszym od 4 drużyn i zagrać w finale (patrz rysunek). Gdy wszystkie początkowe rozstawienia drużyn są jednakowo prawdopodobne, to szansa na to, że drużyna gorsza od $k/2$ spośród k startujących dotrze do finału, jest równa około $3/100$ dla $k = 8$, około 0,00016 dla $k = 16$, a dla $k = 32$ jest ponad 20 razy mniejsza niż szansa trafienia szóstki w Totolotku. Przed niepożądanym i, jak widać, mało prawdopodobnym trafianiem szaraków do finału (a co za tym idzie, przedwczesnym odpadaniem dobrych drużyn) organizatorzy turniejów zabezpieczają się, rozstawiając silne drużyny w różnych parach, co wyklucza sytuacje takie, jak na naszym rysunku.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI