# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

**Uwaga:** W związku z terminowym ukazywaniem się *Delty* na rozwiązania zadań ligowych czekamy do końca miesiąca

$n+2.$

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1996

Przypominamy treść zadań:

**217.** Bardzo długa jednorodna pozioma belka opiera się na wielu równo odległych podporach. Jeśli pada śnieg obciążając belkę równomiernie, to pierwsze złamanie belki nastąpi w jednym z punktów podparcia czy w jednym z punktów środkowych między podporami? Zakładamy, że: a) odchylenie belki $y(x)$ w punkcie $x$ od prostej poziomej jest niewielkie, b) belka podlega prawu Hooke'a, tzn. w każdym punkcie jej krzywizna (zgodnie z punktem a) równa drugiej pochodnej $y''(x)$) jest proporcjonalna do momentu siły zginającej.

**218.** Głośnik zamknięto pod kloszem pompy próżniowej. Ile powinno wynosić ciśnienie pod kloszem, aby dźwięk dobiegający na zewnątrz był o 20 dB słabszy niż przy ciśnieniu normalnym? Temperatura powietrza jest ustalona.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 209 ($WT$=1,86) i 210 ($WT$=2,20) z numeru 12/1995

| | | |
|---|---|---|
| Aleksander Surma | – Myszków | 35,53 |
| Jarosław Łazuka | – Warszawa | 35,16 |
| Przemysław Gworys | – Częstochowa | 30,61 |
| Przemysław Gadziński | – Środa Śl. | 26,68 |
| Artur Gawryszczak | – Dubeczno | 16,36 |

**217.** Przyjmijmy, że odległość między podporami wynosi $2a$, a obciążenie (siłę) na jednostkę długości belki oznaczmy przez $f$. Niech $x$ będzie współrzędną wzdłuż belki, a $x=0$ – jednym z punktów podparcia. Dalej oznaczmy odchylenie pionowe jako $y(x)$, a moment siły wyginającej jako $M(x)$, przy czym dodatnia wartość $M$ odpowiada dodatniej drugiej pochodnej $y''$ (taki jest ten znak w okolicy punktu $x=a$). Rozważmy mały odcinek belki od punktu $x$ do $x+\mathrm{d}x$, a dla ustalenia uwagi przyjmijmy $0<x<a$. Działa na niego z lewej strony prawoskrętnie moment $M(x)$, a z prawej lewoskrętnie $M(x+\mathrm{d}x)$; ponadto łatwo wyliczyć wartość siły pionowej $F_{\text{pion}} = f(a-x)$ działającej między elementami belki. Moment tej siły wynosi w odniesieniu do naszego małego odcinka $f(a-x)\mathrm{d}x$ („małe wyższego rzędu” zostały pominięte), a zwrot jest prawoskrętny. Warunek równowagi przybiera więc postać

$$M(x+\mathrm{d}x) = M(x) + f(a-x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Całkując to równanie znajdujemy funkcję $M(x)$

$$M(x) = M_0 + fax - fx^2/2\,.$$

Zgodnie z założeniem $M$ jest proporcjonalne do $y''$. Całkując ponownie (z uwzględnieniem warunków początkowych $y(0)=y'(0)=0$) otrzymujemy

$$y(x) = \mathrm{const}(M_0x^2/2 + fax^3/6 - fx^4/24)\,.$$

Należy jeszcze wykorzystać warunek $y(2a)=0$ (albo $y'(a)=0$). Stąd wynika $M_0 = -fa^2/3$, a dalej w środku między podporami znajdujemy $M(a) = fa^2/6$. Bezwzględna wartość $M$ jest więc dwukrotnie większa w punktach podparcia i tam złamanie belki jest najbardziej prawdopodobne.

Powyższy dowód można uogólnić na przypadek dowolnego (niekoniecznie równomiernego) rozkładu obciążenia wzdłuż belki – byle tylko nie było ono skupione wyłącznie w środkach między podporami.

**218.** Obniżenie poziomu natężenia o 20 dB oznacza 100-krotny spadek natężenia (tzn. 100-krotny spadek mocy fali dźwiękowej). Przy ustalonej amplitudzie i częstotliwości drgań membrany głośnika moc fali jest natomiast proporcjonalna do gęstości gazu. Dokładny dowód tego faktu można znaleźć w podręcznikach akademickich (np. *Fale* Crawforda), ale do naszych celów wystarczy następujące proste rozumowanie: przy dwukrotnie większej gęstości membrana wprawi w ruch z tą samą prędkością element objętości gazu mający dwukrotnie większą masę, zatem nada mu dwukrotnie większą energię kinetyczną; ponieważ energia kinetyczna stanowi dokładnie połowę energii fali, więc i całkowita energia ulegnie wtedy podwojeniu. Zatem w naszym problemie gęstość powietrza powinna zmniejszyć się stukrotnie, a z równania Clapeyrona wnioskujemy, że w takim samym stosunku obniży się ciśnienie – czyli wyniesie ono około 1000 Pa.

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1996

Przypominamy treść zadań:

**319.** Rozwiązać układ równań:

$$(1+x^2)y = x\,, \quad 12y^3 + z = 3y + 2\,, \quad |3z-5| = 1 - x\,.$$

**320.** Dla danych liczb dodatnich $R$ i $r$, spełniających warunek $R \geq 2r$, obliczyć kres dolny oraz kres górny pól trójkątów wpisanych w koło o promieniu $R$ i (jednocześnie) opisanych na kole o promieniu $r$.

**319.** Załóżmy, że liczby rzeczywiste $x$, $y$, $z$ spełniają ten układ. Liczba $y = x/(1+x^2)$ ma moduł nie większy od $1/2$, a zatem $1 - 4y^2 \geq 0$.

Przypuśćmy, że $x > 0$. Wtedy także $y > 0$, więc $z = 2 + 3y - 12y^3 = 2 + 3y(1-4y^2) \geq 2$; stąd $3z - 5 \geq 1$, wobec czego $x = 1 - |3z-5| \leq 0$. Sprzeczność.

Przypuśćmy z kolei, że $x < 0$. Wtedy $y < 0$, więc $z = 2 + 3y(1-4y^2) \leq 2$. Nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną trójki liczb $\frac{1}{2}(1-4y^2)$, $\frac{1}{2}(1-4y^2)$, $4y^2$ prowadzi do oszacowania $y^2(1-4y^2)^2 \leq \frac{1}{27}$. Stąd $|y|(1-4y^2) \leq \frac{1}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{9}$, czyli $y(1-4y^2) > -\frac{2}{9}$, i w konsekwencji $z = 2 + 3y(1-4y^2) > \frac{4}{3}$. Z uzyskanych oszacowań wynika, że $-1 \leq 3z - 5 \leq 1$; zatem $x = 1 - |3z-5| \geq 0$. Sprzeczność.

Pozostała możliwość, że $x = 0$. Wtedy $y = 0$, $z = 2$. Ta trójka liczb istotnie spełnia podany układ równań i jest jego jedynym rozwiązaniem.

**320.** Liczby $a$, $b$, $c$ są długościami boków trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby dodatnie $x$, $y$, $z$, że $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Promienie $r$ i $R$ (okręgów: wpisanego i opisanego) oraz pole $S$ takiego trójkąta wyrażają się wzorami:

$$r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\,,$$

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2} = r(x+y+z),$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4r(x+y+z)} = \frac{yz+zx+xy}{4r} - \frac{r}{4}\,,$$

z których wyznaczamy wartości podstawowych form symetrycznych zmiennych $x$, $y$, $z$:

$$(1) \qquad x+y+z = S/r, \qquad yz+zx+xy = 4Rr + r^2, \qquad xyz = Sr\,.$$

Liczby $x$, $y$, $z$ są więc pierwiastkami wielomianu

$$(2) \qquad P(t) = t^3 - (S/r)t^2 + (4Rr + r^2)t - Sr\,.$$

Na odwrót, jeśli ten wielomian ma (dla danych parametrów $S, R, r > 0$) trzy pierwiastki rzeczywiste $x$, $y$, $z$, to spełnione są związki (1) (z których wynika, że $x, y, z > 0$) oraz spełnione są wszystkie poprzednie równości, a zatem trójkąt o bokach $y+z$, $z+x$, $x+y$ ma pole $S$ i promienie okręgów opisanego i wpisanego odpowiednio $R$ i $r$.

Podstawienie $t = z + S/(3r)$ przeprowadza wielomian $P(t)$ do postaci

$$(3) \qquad Q(z) = z^3 + Az - B\,,$$

gdzie

$$(4) \qquad A = \frac{3r^4 + 12Rr^3 - S^2}{3r^2}\,, \qquad B = \frac{2S(9r^4 - 18Rr^3 + S^2)}{27r^3}\,.$$

Z teorii równań sześciennych (Tartaglia–Cardano) wiadomo, że wielomian (3) ma trzy pierwiastki rzeczywiste (z uwzględnieniem krotności) wtedy i tylko wtedy, gdy $4A^3 + 27B^2 \leq 0$. Dla współczynników $A$, $B$ danych wzorami (4) nierówność ta jest równoważna następującej:

$$S^4 + (2r^4 - 20Rr^3 - 4R^2r^2)S^2 + (r^8 + 12Rr^7 + 48R^2r^6 + 64R^3r^5) \leq 0\,.$$

Parametry $R$ i $r$ są ustalone ($R \geq 2r > 0$); chcemy wyznaczyć zbiór liczb dodatnich $S$ spełniających otrzymaną nierówność dwukwadratową. Rutynowe obliczenia prowadzą do odpowiedzi: szukanym zbiorem jest przedział $\langle S_1; S_2\rangle$ o końcach

$$S_1 = r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - \frac{2d^3}{R}} = \frac{(R+d)(R+r-d)^{3/2}}{\sqrt{2R}}\,,$$

$$S_2 = r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 + \frac{2d^3}{R}} = \frac{(R-d)(R+r+d)^{3/2}}{\sqrt{2R}}\,,$$

gdzie $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (interpretacja geometryczna liczby $d$: jest to odległość między środkami okręgów opisanego i wpisanego). W myśl wcześniejszych stwierdzeń, znalezione wartości $S_1$ i $S_2$ są ekstremalnymi wartościami pól trójkątów o zadanych promieniach $R$ i $r$.

[Inna metoda: zbiór trójkątów o zadanych parametrach $R$ i $r$ można utożsamiać z pewnym zwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, przyjmując jako zmienne na przykład długości boków; zatem wartość pola, które jest funkcją ciągłą owych zmiennych, osiąga na tym zbiorze minimum oraz maksimum. Jeżeli wielomian (2) ma trzy *różne* pierwiastki rzeczywiste, to po niewielkiej zmianie $S$ (w którymkolwiek kierunku) powstały wielomian także będzie miał trzy pierwiastki rzeczywiste. Stąd wniosek, że dla ekstremalnych wartości $S$ wielomian (2) musi mieć pierwiastek podwójny. Podstawiając we wzorach (1) $x = z$, a następnie eliminując $x$ i $y$, dostajemy równanie wiążące $R$, $r$ i $S$; nieprzyjemnych rachunków i tak się nie uniknie. Otrzymane równanie daje się rozwiązać względem $S$; pierwiastkami są liczby $S_1$ i $S_2$, znalezione powyżej.]