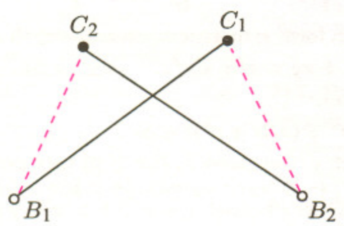
Kącik Olimpijski (18)
Niezmienniki i półniezmienniki (II)

W poprzednim *Kąciku* zajmowaliśmy się zadaniami, w których opisany był pewien proces. Szukaliśmy wtedy niezmienników (czyli czegoś, co nie ulegało zmianie podczas wykonywania procesu) bądź półniezmienników (czyli czegoś, co się zmieniało, ale w sposób dla nas wygodny) i to już wystarczało, aby rozwiązać częstokroć niełatwe zadanie. Okazuje się, że metodę tę można również stosować w niektórych zadaniach, gdzie na pozór nie występuje żaden proces. Oto przykład.

1. *Danych jest $2n$ punktów na płaszczyźnie (żadne trzy nie są współliniowe) – n białych i n czarnych. Udowodnić, że punkty te można tak połączyć n odcinkami, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.*

Oznaczmy punkty białe i czarne odpowiednio przez $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n$. Skonstruujemy pewien proces, który doprowadzi nas po skończonej liczbie kroków do celu. Na początek połączmy odcinkami punkt B_1 z C_1, B_2 z C_2, …, B_n z C_n. Jeśli żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych, zadanie rozwiązaliśmy. Przypuśćmy więc, że na przykład odcinki B_1C_1 i B_2C_2 przecinają się. Wówczas zamiast tych odcinków narysujmy odcinki B_1C_2 i B_2C_1:



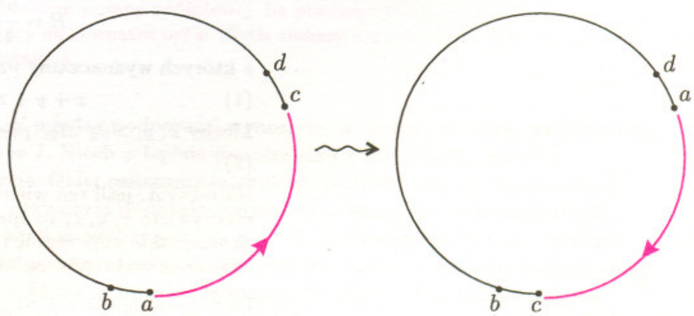
Jeśli w dalszym ciągu pewne dwa odcinki się przecinają, postępujemy z nimi analogicznie, itd. Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, dlaczego po skończonej liczbie kroków żadne dwa odcinki nie będą się przecinać? Poszukajmy więc jakiegoś niezmiennika lub półniezmiennika. Konstrukcja naszego procesu narzuca nam następujący „półniezmiennik": *liczba punktów przecięcia wszystkich narysowanych odcinków*. Nasz ruch polegał przecież na pozbyciu się jednego z punktów przecięcia. Jednak pozbywając się w ten sposób tego jednego punktu, możemy uzyskać niechcący całą masę innych. Wtedy liczba punktów przecięcia zamiast maleć i przybliżać nas do celu, może wzrastać. Mimo wszystko jednak cel jest bliski – należy zauważyć, że po każdym ruchu *suma długości wszystkich odcinków* maleje. Ponieważ suma ta może przyjmować jedynie skończenie wiele wartości, więc proces nasz po skończonej liczbie kroków musi się zakończyć.

Powyższe rozwiązanie można zredagować w następujący, bardziej elegancki sposób:
Połączmy tak punkty białe $B_1, \ldots, B_n$ z czarnymi $C_1, \ldots, C_n$, aby suma długości otrzymanych odcinków była najmniejsza (tak zawsze da się zrobić, gdyż punkty białe można połączyć z czarnymi na skończenie wiele sposobów, a w dowolnym skończonym zbiorze liczb rzeczywistych istnieje liczba najmniejsza). Przypuśćmy, że wśród otrzymanych odcinków $B_1C_1, B_2C_2, \ldots, B_nC_n$ odcinki B_1C_1 i B_2C_2 przecinają się. Wtedy łączymy punkty odcinkami $B_1C_2, B_2C_1, B_3C_3, \ldots, B_nC_n$. Suma długości tych odcinków jest mniejsza niż suma długości odcinków $B_1C_1, \ldots, B_nC_n$, co przeczy wyżej uczynionemu założeniu. Zatem odcinki $B_1C_1, \ldots, B_nC_n$ nie mają punktów wspólnych.

Czytelnik zechce zauważyć, że w podobny sposób rozwiązaliśmy jedno z zadań w „kąciku" w *Delcie* 1/1995. Oto następny przykład.

2. *Na dworze króla Artura przebywa $2n$ rycerzy ($n \geq 2$), z których każdy ma wśród pozostałych co najwyżej $n-1$ wrogów. Udowodnić, że Merlin, doradca Artura, może tak rozsadzić rycerzy za Okrągłym Stołem, aby żaden rycerz nie siedział obok swojego wroga.*

Niech na początku rycerze usiądą dowolnie. Pokażemy jak zmniejszyć liczbę par rycerzy, którzy są wrogami i siedzą obok siebie. Niech rycerz a siedzący z prawej strony rycerza b będzie jego wrogiem. Rozpatrzmy zbiór D wszystkich rycerzy nie siedzących obok a, którzy nie są wrogami a. Jest ich co najmniej $n-1$. Rycerz b ma co najwyżej $n-1$ wrogów, w tym a, istnieje więc rycerz c, który nie jest wrogiem b i który siedzi z lewej strony pewnego rycerza d ze zbioru D. Przesadźmy teraz rycerzy tak jak pokazują strzałki na rysunku:



Teraz każdy zdoła sam dokończyć dowód.

Na koniec tradycyjnie kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

3. Na płaszczyźnie danych jest n punktów $A_1, \ldots, A_n$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Udowodnić, że proste te można oznaczyć przez $l_1, l_2, \ldots, l_n$ oraz tak wybrać na nich odpowiednio punkty $B_1, B_2, \ldots, B_n$, aby dla każdego i, $1 \leq i \leq n$, prosta A_iB_i była prostopadła do l_i oraz odcinki $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ były parami rozłączne.

4. Danych jest $n \geq 3$ miast. Połączenie między każdą parą miast obsługuje inna linia lotnicza. Pewnego dnia zastrajkowało $n-3$ linii lotniczych. Udowodnić, że mimo to można w tym dniu odbyć taką podróż lotniczą, by w każdym z miast być dokładnie raz.

5. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Wykazać, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego z pozostałych miast.

6. Dany jest wypukły wielokąt W o tej własności, że nie można nim pokryć żadnego trójkąta o polu $1/4$. Udowodnić, że wielokąt W można pokryć pewnym trójkątem o polu 1.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE