Huśtawka

Krzysztof ERNST

Huśtanie się na huśtawce jest niewątpliwie jedną z najpopularniejszych zabaw okresu dziecięcego. Jest też zajęciem znakomicie relaksującym i to niezależnie od wieku. Najprostsza odmiana huśtawki, czyli trapez, jest wreszcie z powodzeniem wykorzystywana do wykonywania efektownych ewolucji i akrobacji.

Siadając na huśtawce nie zastanawiamy się prawie nigdy nad tym, jaka sekwencja ruchów pozwoli nam huśtawkę rozbujać. Wszystkie ruchy wykonujemy intuicyjnie i zazwyczaj prowadzą nas one do oczekiwanych efektów. Co ciekawe, znakomicie radzą sobie na huśtawce właśnie dzieci nie mające jeszcze żadnych podstaw ku temu, aby zrozumieć mechanizm zjawiska, a następnie świadomie zastosować go w praktyce.

Poczyńmy zatem próbę wyjaśnienia tajemnic huśtawki i skorzystajmy w tym celu z elementarnych praw fizyki. Zacznijmy od stwierdzenia, które może wydać się oczywiste, ale jest na pewno znakomitym punktem wyjścia do wszelkich rozważań. Rozhuśtywanie się huśtawki wraz z jej pasażerem oznacza wzrost energii całego układu. Aby wzrost taki nastąpił, musi zostać wykonana pewna praca, a jest rzeczą oczywistą, że wykonać ją może tylko pasażer. Nie interesuje nas przecież sytuacja, w której huśtawka popychana jest przez inną osobę stojącą z boku.

Zauważmy teraz, że siła działająca na środek ciężkości naszego układu (huśtający się + huśtawka) wzdłuż liny, na której jest on zawieszony, jest sumą składowej siły ciężkości i siły odśrodkowej. Zmienia się ona periodycznie w czasie i może być zapisana w następującej postaci

$$F = Mg\cos\alpha + Mv^2/l, \tag{1}$$

gdzie α oznacza kąt wychylenia z położenia równowagi, v – prędkość środka masy, l – długość huśtawki, g – przyspieszenie ziemskie, M – masę układu, którą z dobrym przybliżeniem możemy utożsamić z masą huśtającej się osoby.

Jak wynika bezpośrednio ze wzoru (1), siła F jest największa przy przechodzeniu huśtawki przez położenie równowagi ($\alpha = 0$, $v = v_{\text{maks}}$), a najmniejsza w położeniach skrajnych ($\alpha = \alpha_{\text{maks}}$, $v = 0$). Spróbujmy wykorzystać powyższą obserwację proponując jako prosty mechanizm rozbujania huśtawki podnoszenie środka ciężkości wtedy, kiedy przechodzi ona przez położenie równowagi, i opuszczanie go w położeniach skrajnych. Praca wykonywana przeciw siłom zewnętrznym (podnoszenie) jest w ten sposób większa niż praca ujemna (opuszczanie) wykonywana przez te siły. Oznacza to, że całkowita praca przypadająca na każdy okres wahań jest dodatnia, czego konsekwencją jest wzrost energii układu, a tym samym amplitudy jego wahań.

Postarajmy się teraz nadać naszym rozważaniom charakter ilościowy. Wprowadźmy w tym celu pewne uproszczenie polegające na potraktowaniu układu huśtawki jako wahadła matematycznego o zmiennej okresowo długości. Przybliżenie takie oznacza, że traktujemy huśtającego się jako punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici oraz zaniedbujemy wszelkie opory ruchu (opór powietrza, tarcie w punkcie zawieszenia).

Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na rysunku 1, na którym linią ciągłą zaznaczono początkową część toru punktowej masy M, możemy napisać trzy następujące równania:

$$Mg(l + \Delta l)(1 - \cos\alpha) = Mv_B^2/2, \tag{2}$$

$$M(l + \Delta l)v_B = Mlv_C, \tag{3}$$

$$Mv_C^2/2 = Mgl(1 - \cos\beta), \tag{4}$$

gdie v_B i v_C oznaczają prędkości wahadła w punktach B i C.

Rozwiązanie zadania F 433. Równanie ruchu pocisku ma postać

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - c(\mathbf{v} + \mathbf{u}_0),$$

gdzie $\mathbf{g} = \text{const}$ jest ziemskim przyspieszeniem grawitacyjnym, a stała c określa wartość siły oporu. Przepiszemy je w następującej postaci

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + c\mathbf{v} = \mathbf{g} - c\mathbf{u}_0.$$

Jest to równanie ruchu w efektywnym, jednorodnym polu grawitacyjnym $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - c\mathbf{u}_0$. Skoro więc pocisk spadł na działo, to został wystrzelony w kierunku $-\mathbf{g}'$, czyli pod kątem θ (do poziomu) spełniającym warunek

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{g}{cu_0},$$

a jego tor jest linią prostą.

Skierujmy oś y' wzdłuż wektora $-\mathbf{g}'$. Całkując równanie ruchu dostajemy

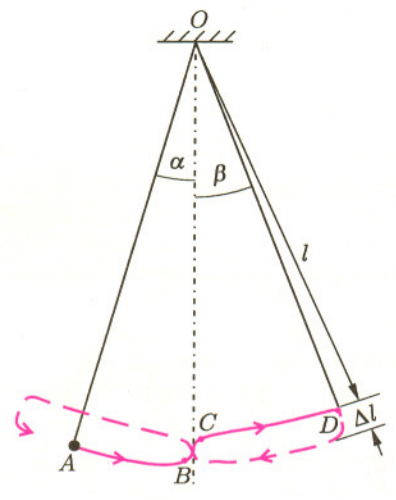
$$v = -\frac{g'}{c} + \left(v_0 + \frac{g'}{c}\right)e^{-ct},$$

$$y' = -\frac{g'}{c}t + \left(\frac{v_0}{c} + \frac{g'}{c^2}\right)(1 - e^{-ct}),$$

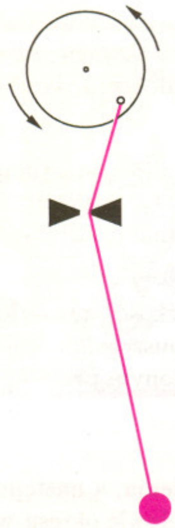
gdzie $g' = \sqrt{g^2 + c^2u_0^2}$. Kładąc $v = 0$ znajdujemy czas, w którym pocisk maksymalnie oddalił się od armaty, a stąd jego maksymalną odległość od armaty, maksymalną wysokość i zasięg:

$$h_{\max} = y'_{\max}\sin\theta = \frac{v_0}{c}\sin\theta - \frac{g}{c^2}\ln\left(1 + \frac{cv_0\sin\theta}{g}\right),$$

$$s_{\max} = y'_{\max}\cos\theta = h_{\max}\operatorname{ctg}\theta.$$



Rys. 1



Rys. 2

Równania (2) i (4) wyrażają zasadę zachowania energii wahadła przy zmianie jego energii potencjalnej na kinetyczną lub odwrotnie. Pierwsze z nich odnosi się do odcinka toru AB, drugie natomiast do odcinka CD. Równanie (3) wyraża zasadę zachowania momentu pędu względem osi O przy podnoszeniu środka ciężkości na drodze BC. Eliminując z trzech powyższych równań wielkości v_B i v_C, możemy otrzymać po prostych przekształceniach następującą równość

(5) $$\cos\alpha - \cos\beta = (1-\cos\alpha)[(1+\Delta l/l)^2 - 1]\,.$$

Jej prawa strona jest zawsze dodatnia, a tym samym w przedziale kątowym od 0 do π musi być spełniona relacja $\alpha < \beta$. Oznacza to, że zaproponowana przez nas technika prowadzi do wzrostu amplitudy, co właśnie chcieliśmy wykazać. Zwróćmy również uwagę na bardzo istotny fakt, że im większe początkowe wychylenie kątowe α z położenia równowagi, tym większy wzrost amplitudy wahań.

W przypadku wahadła, którym posłużyliśmy się jako idealizacją huśtawki, podnoszenie i opuszczanie masy zawieszonej na nici zrealizować możemy za pomocą bardzo prostego układu przedstawionego na rysunku 2. Dobierając prędkość kątową napędzanego silnikiem koła tak, aby czas pełnego obrotu był dwa razy krótszy od okresu drgań wahadła, możemy amplitudę drgań sukcesywnie zwiększać.

Jest to typowy przykład tzw. parametrycznego wzbudzania drgań. Tak właśnie określane jest wzbudzenie układu, które następuje pod wpływem zmian wartości parametru (tutaj długości wahadła), od którego zależy okres jego drgań własnych. A zatem huśtawka to nic innego, jak parametryczny wzmacniacz drgań.

Huśtawki mogą różnić się między sobą, mogą też być w różny sposób wykorzystywane. W rozróżnieniu tym chodzi nam przede wszystkim o ich zawieszenie (na linach lub na sztywnych prętach) oraz o pozycję przyjmowaną w trakcie huśtania się (siedzącą lub stojącą). Przy zachowaniu wielu cech wspólnych prowadzi to bowiem także do pewnych różnic. Na przykład, w pozycji stojącej łatwe jest podnoszenie i obniżanie środka ciężkości, a tym samym opisany przez nas mechanizm „pompowania” (takie właśnie określenie jest popularnie używane), może być znacznie efektywniejszy. Zawieszenie huśtawki na sztywnych prętach pozwala z kolei, przy odpowiednich umiejętnościach i odwadze, nawet na zatoczenie pełnego okręgu wokół osi obrotu.

Oszacujmy teraz, jaką pracę wykonuje „pompujący” podnosząc swój środek ciężkości. Wykonana praca jest po prostu iloczynem siły F (wyznaczonej z równania (1) dla $\alpha = 0$) przez drogę środka ciężkości. Mamy zatem

(6) $$L = (M\mathrm{g} + Mv^2/l)\Delta l\,.$$

Powyższa postać wzoru została otrzymana przy upraszczającym założeniu, że $\Delta l \ll l$, co w większości przypadków jest w pełni uzasadnione. Jeśli teraz, korzystając z tego samego założenia, podstawimy w miejsce v^2 w równaniu (6) wartość v_B^2 z równania (2), to otrzymamy

(7) $$L = [M\mathrm{g} + 2M\mathrm{g}(1-\cos\alpha)]\Delta l = M\mathrm{g}\Delta l(3 - 2\cos\alpha)\,.$$

Praca ta w przypadku huśtawki startującej z położenia początkowego określonego przez $\alpha = 20^\circ$ oraz dziecka o masie $M = 50$ kg podnoszącego swój środek ciężkości o 15 cm, jest równa około 84 J. Przy „pompowaniu” ciągłym praca taka wykonana jest dwukrotnie w czasie każdego okresu drgań, który zależy w prosty sposób od długości huśtawki (wahadła) i wynosi

(8) $$T = 2\pi\sqrt{(l/\mathrm{g})}\,.$$

Dla huśtawki o długości 2,5 m okres wahań jest równy około 3 s, co oznacza, że huśtawka napędzana jest przez „pompujące” dziecko z mocą około 63 watów. Nie jest to więc zabawa męcząca i może dlatego dostarcza tyle radości i satysfakcji.

Wspomnieliśmy już, że rozhuśtać się potrafi prawie każdy i to bez żadnej potrzeby wcześniejszego opanowania teorii działania huśtawki ani posiadania

Rozwiązanie zadania F 434. Zgodnie z klasyczną teorią elektromagnetyzmu moc wypromieniowana jest równa

$$P = -\frac{2}{3}\frac{ke^2}{c^3}a^2\,,$$

gdzie $a = \frac{GM}{r^2}$ (M jest masą gwiazdy) jest przyspieszeniem elektronu. Załóżmy, że tor elektronu jest w przybliżeniu okręgiem. Przekonamy się później, że jest to bardzo dobre założenie. Różniczkując całkowitą energię elektronu $E = -\frac{GMm}{2r}$ względem czasu otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{GMm}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,.$$

Porównując oba wzory znajdujemy

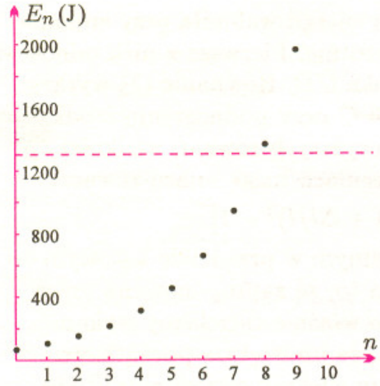
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{4ke^2GM}{3mc^3}\frac{1}{v^2}\,.$$

Całkując powyższe równanie otrzymujemy

$$T = \frac{3mc^3}{16\pi ke^2G}\frac{\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1}{\varrho}\,.$$

Podstawiając wartości liczbowe znajdujemy

$$T = 3{,}6\cdot 10^7\ \text{lat}\,.$$



Rys. 3

specjalnych ku temu predyspozycji. Jednak w miarę wzrostu amplitudy wahań trudności rosną. Trzeba też wykazywać się coraz większą odwagą. Zastanówmy się więc, jak szybko następuje wzrost amplitudy przy założeniu, że utrzymujemy cały czas rytm „pompowania".

Energia huśtawki (konsekwentnie traktowanej jako wahadło), startującej z położenia początkowego określonego przez kąt α (rys. 1), w chwili przechodzenia przez położenie równowagi wynosi (z równania (2))

$$E_0 = mv_B^2/2 = Mg(l + \Delta l)(1 - \cos\alpha)\,. \tag{9}$$

Energia ta po wykonaniu pracy podnoszenia środka ciężkości wzrośnie o wartość L wyrażoną równaniem (6). Ujemna praca opuszczania środka ciężkości w położeniu maksymalnego wychylenia, określonym przez kąt β, jest równa natomiast

$$L_1 = -Mg\Delta l \cos\beta\,. \tag{10}$$

A zatem całkowita energia huśtawki w wyniku podniesienia, a następnie opuszczenia środka ciężkości, czyli po czasie równym połowie okresu wahań, wyniesie

$$E_2 = E_0 + L + L_1\,. \tag{11}$$

Skorzystajmy jeszcze z równania

$$Mgl(1 - \cos\beta) = E_0 + L\,, \tag{12}$$

wyrażającego, podobnie jak równanie (4), zasadę zachowania energii na drodze CD (rys. 1).

Podstawiając teraz do równania (11) odpowiednie wartości z równań (6), (9) i (10) oraz $\cos\beta$ wyznaczony z równania (12) otrzymujemy (zaniedbując wyrazy kwadratowe względem $\Delta l/l$) następującą zależność

$$E_2 = E_0(1 + 3\Delta l/l)\,. \tag{13}$$

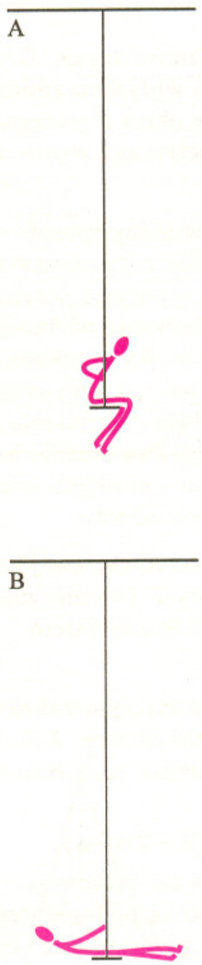
Uogólniając powyższy wzór na n pełnych okresów drgań mamy dalej

$$E_n = E_0(1 + 3\Delta l/l)^{2n}\,, \tag{14}$$

co przy naszym upraszczającym założeniu $\Delta l/l \ll 1$ możemy zapisać w postaci

$$E_n = E_0 \exp(6n\Delta l/l)\,. \tag{15}$$

Zobaczmy, jak wygląda graficznie (rys. 3) przebieg powyższej zależności w przypadku naszej huśtawki ($l = 2{,}5$ m) przy amplitudzie pompowania $\Delta l = 15$ cm i starcie w położeniu początkowym $\alpha = 20°$ odpowiadającym wartości $E_0 = 78$ J. Na wykresie widać wyraźnie wykładniczy charakter wzrostu energii huśtawki z każdym kolejnym okresem jej wahań. Utrzymanie stałego rytmu „pompowania" prowadzi zatem bardzo szybko do wychyleń, przy których obok sympatycznych doznań może pojawić się odczucie strachu. Należy o tym pamiętać i zachować na huśtawce umiar w szybkości pompowania.



Rys. 4

Przerywana linia na rysunku 3 odpowiada wartości energii, jaką huśtawka osiąga wtedy, kiedy jej skrajnym położeniem jest pozycja pozioma. Jak widać, można ją uzyskać już w ósmym okresie wahań. Warto jeszcze zwrócić uwagę na inną własność huśtawki, wynikającą zresztą z równania (15). Otóż szybkość wzrostu energii huśtawki jest niezależna od jej masy.

Zarówno z zasady parametrycznego wzmacniania drgań wahadła, jak również ze wzoru (15) wynika, że przedstawiona wyżej metoda rozbujania huśtawki zawodzi, jeśli w chwili początkowej znajduje się ona w spoczynku. Innymi słowy, potrzebny jest sygnał początkowy, aby móc go wzmocnić. Wprawdzie absolutny bezruch nie istnieje, a najdrobniejsze nawet fluktuacje stanowią w zasadzie wystarczający sygnał początkowy, ale czas potrzebny na wzbudzenie znaczących drgań może być w takim przypadku zniechęcająco długi.

Z powyższych rozważań wynika zatem, że na samym początku powinniśmy huśtawce „pomóc" w inny sposób. Możemy to uczynić, na przykład, odpychając się od ziemi w momencie wsiadania na huśtawkę, ale tym sposobem, jako zbyt prozaicznym, nie będziemy się tu zajmować.

Możemy też wprowadzić huśtawkę w ruch nie korzystając z pomocy podłoża. Otóż wyrzucenie nóg do przodu spowoduje, że huśtawka odchyli się do tyłu. Przeciwny manewr, polegający na zgięciu nóg w kolanach w chwili maksymalnego wychylenia, przyspieszy jej powrót w kierunku położenia równowagi. I to w zupełności wystarczy, aby przygotować nasz układ do parametrycznego wzmacniania rozpoczętych drgań.

Jest też inny, skuteczniejszy sposób wyprowadzenia huśtawki z położenia równowagi. Możemy mianowicie odchylić się do tyłu, przechodząc z pozycji A do pozycji B na rysunku 4. Taki obrót ciała oznacza, że uzyskuje ono moment pędu względem środka masy. Zachowanie zerowego momentu pędu całego układu (huśtawka+pasażer) wymaga, aby nastąpił równoczesny obrót (w przeciwnym kierunku) huśtawki wokół punktu jej zawieszenia. Powtarzając w odpowiednim momencie podobny manewr w przeciwną stronę, kontynuujemy „napędzanie" huśtawki powracającej do położenia równowagi. Technika taka może być zresztą samowystarczalna i pozwala na rozbujanie się, choć znacznie wolniej, bez konieczności „pompowania". Mamy tu układ dwóch oddziałujących oscylatorów, z których jeden (huśtawka) sterowany jest odpowiednimi ruchami drugiego (huśtający się pasażer).

Do takiego samego wniosku moglibyśmy również dojść rozwiązując dosyć skomplikowane równania ruchu przy niezbędnych zresztą (dla tak złożonego układu) upraszczających założeniach. Rachunków tych nie będziemy tu, oczywiście, przytaczać, a wspomnieliśmy o nich tylko po to, aby uświadomić Czytelnikowi, że huśtawka to nie tylko zabawa i rozrywka, ale także wcale niebanalny problem fizyczny.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 780. W zagubionym pośród imperialistycznej prerii miasteczku Milky Cow 100 kowbojów nawiedza wieczorami 100 lokalnych całodobowych saloonów mlecznych. Każdy z kowbojów wybiera (losowo i niezależnie od kolegów po fachu) lokal, w którym spędzi resztę nocy nad kufelkiem mleka. Szeryf miasteczka próbuje zakazać w Milky Cow handlu artykułami mlecznymi pod pretekstem, że przez większość nocy 3/4 saloonów i tak świeci pustkami. Miłujący mleko Czytelniku, wykaż, że szeryf rozmija się z prawdą!
Rozwiązanie na str. 9

M 781. W chorym z braku mleka umyśle szeryfa zalęgły się nowe urojenia. Tym razem stróż prawa twierdzi, że większość kowbojów pije samotnie, co pogłębia nałóg. Czy ma rację?
Rozwiązanie na str. 7

M 782. Szeryf wprowadził nowe drakońskie prawa, aby zmniejszyć podaż mleka w Milky Cow. Odtąd odległość między dwoma saloonami musi przekraczać 250 m, a ich odległość od jedynego w mieście więzienia ma być mniejsza niż 1 km. Czy miasteczko pomieści 100 legalnych saloonów?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje Krzysztof REJMER

F 433. Z armaty wystrzelono pocisk o prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$, który ponownie trafił w armatę. Pod jakim kątem wystrzelono pocisk, jeśli wiadomo, że wieje wiatr z prędkością $\mathbf{u}_0$ (skierowaną poziomo)? Przyjąć, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości pocisku. Znaleźć maksymalną wysokość i maksymalną (poziomą) odległość, na jaką pocisk oddalił się od armaty.
Rozwiązanie na str. 10

F 434. Elektron krąży wokół gwiazdy neutronowej o średniej gęstości $\varrho = 2\cdot 10^{17}$ kg/m^3 po orbicie kołowej o promieniu $R_0 = 1{,}5R$, gdzie R jest promieniem gwiazdy. Po jakim czasie elektron spadnie na powierzchnię gwiazdy? Promieniowanie elektronu należy potraktować klasycznie.
Rozwiązanie na str. 11