epsilon

8/96

(65)

## Skąd się wzięły pewne liczby

Pytają uczniowie, czemu tak się dzieje
że aż tyle różnych dziwnych liczb istnieje.
Ułamki, pierwiastki, liczby urojone,
ujemne,... Do czego przydadzą się one?
Otóż, przede wszystkim, gdy coś zliczyć chcemy,
na naturalnych liczbach operujemy.
Dobrze się je mnoży i dobrze dodaje,
lecz od mniejszej większej odjąć się nie daje.
Mamy na to radę – sposób znakomity:
Po to wprowadzamy zbiór liczb całkowitych.
Dołączamy liczby, co dla wielu dziwne –
ujemne, czyli do dodatnich przeciwne.
Ale jest z tym zbiorem jeszcze jakaś bieda,
bo się ilorazu obliczyć w nim nie da.
Dlatego ułamki wszystkie dołączamy
i do liczb wymiernych nasz zbiór rozszerzamy.
Gdy uporządkować liczb wymiernych ciało,
widać, że coś jeszcze by nam brakowało.
Między ułamkami są jak gdyby dziury.
Nie każdy podzbiór ograniczony od góry
posiada kres górny w liczb wymiernych zbiorze.
Dalsze rozszerzanie jednak pomóc może.
Liczby rzeczywiste więc konstruujemy
i ciało zupełne tak otrzymujemy.
Ale jest w tym ciele jeszcze jedna wada:
nie każdy wielomian pierwiastek posiada.
By temu zaradzić, były wprowadzone
do matematyki liczby zespolone.

*Ludolfina*

Nota bibliograficzna.

Wiersz powyższy został przez Ludolfinę (nie wiadomo, kto ukrył się pod tym pseudonimem) przekazany Kołu Matematyków Studentów UJ jesienią 1984 roku.

---

Książka Iana Stewarta „Does God Play Dice?" („Czy Bóg gra w kości?") jest popularnym wprowadzeniem w matematyczną teorię chaosu. W ciągu pięciu lat od pierwszego wydania (1989) sprzedano około 120 000 egzemplarzy w języku angielskim (co, jak na książkę popularnonaukową, jest wynikiem rewelacyjnym). Książkę przełożono na 13 języków, w tym na polski (gorąco polecamy!).

W jednej z największych krakowskich księgarni książkę umieszczono w dziale: „Religia". Zobaczył to pewien matematyk i zwrócił ekspedientce uwagę, że książka dotyczy matematyki i powinna się znaleźć gdzie indziej. Na to usłyszał:

*– Proszę mi nie gadać bzdur, ja się znam na matematyce, to nie jest żadna książka matematyczna! To jest książka z filozofii religii i powinna tu leżeć, a poza tym ona się stąd bardzo dobrze sprzedaje!*

## Powtarzające się jedynki

Liczby naturalne stanowią niewyczerpane źródło rozmaitych ciekawostek, które mogą niespodziewanie przekształcić się w beznadziejnie trudne problemy. Rozpatrzmy na przykład takie oto pytanie: czy z jednakowych cyfr można zbudować liczbę pierwszą? Z wyjątkiem 11, powinny to być liczby zbudowane z nieparzystej liczby jedynek (dlaczego?).

W porządku, ale które zestawy jedynek ułożą się w liczbę pierwszą? I tu zaczyna się problem. Sprawdzając kilka początkowych przykładów 11, 111, 11111, 1111111 przekonujemy się, iż tylko 11 jest liczbą pierwszą. Wykazanie, że ostatnie dwie przytoczone liczby są złożone, wymaga trochę zachodu. Może więc nie ma wśród takich liczb innych liczb pierwszych?

Liczbami jedynkowymi, bo tak dalej będziemy je nazywać, zainteresował się Johann III Bernoulli, wnuk wielkiego Johanna Bernoulliego. Próbował on sporządzić tablicę liczb jedynkowych wraz z rozkładem na czynniki pierwsze. Przedstawił te liczby aż do 31 cyfr, niestety, nie dla wszystkich znalazł rozkład, ponadto dla niektórych przedstawienie było błędne. Niemniej jednak podziw budzi gigantyczna praca wykonana przez Johanna III. Nie udało mu się też znaleźć żadnej (różnej od 11) liczby pierwszej wśród liczb jedynkowych.

Dopiero w 1918 roku stwierdzono, że liczba składająca się z 19 jedynek jest pierwsza. Jedenaście lat później okazało się, że 23 jedynki układają się w liczbę pierwszą. Następna jedynkowa liczba pierwsza ma już 317 cyfr i została znaleziona w roku 1978. Kolejną liczbą jedynkową, podejrzaną o bycie pierwszą, była składająca się z 1031 jedynek; w 1985 roku zweryfikowano to pozytywnie (chyba ostatecznie). I to wszystko. Więcej pierwszych liczb jedynkowych nie znamy. Nie wiadomo też, czy jest ich nieskończenie wiele, może ktoś kiedyś znajdzie największą.

Istnieje pewien związek między liczbami jedynkowymi a ułamkami okresowymi. Zależności takie zauważył już Johann III tworząc tablicę okresów dla rozwinięć dziesiętnych odwrotności niektórych liczb pierwszych. Czytelnikom zostawiamy do udowodnienia nietrudne twierdzenie.

*Jeśli liczba $p$ nie jest podzielna przez 2 i 5, to można znaleźć liczbę jedynkową podzielną przez $p$.*

Nieco trudniej dowodzi się następującego faktu:

*Jeżeli liczba naturalna $p$ nie jest podzielna przez 2, 3 i 5, to długość okresu rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{1}{p}$ jest równa liczbie jedynek w pierwszej liczbie jedynkowej podzielnej przez $p$.*

W języku angielskim liczby jedynkowe noszą krótką nazwę „repunits", jest to zbitka słów „repeated units" (powtarzana jedynka). W języku polskim nie ma na określenie tych liczb zgrabnego terminu. Może Czytelnicy zaproponują coś ciekawego?

*Z.P.*

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem $\varepsilon$.