Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Uwaga: W związku z terminowym ukazywaniem się *Delty* na rozwiązania zadań ligowych czekamy do końca miesiąca

$n+2$.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1996

Przypominamy treść zadań:

317. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją wielomiany drugiego stopnia F, G, H spełniające warunek: $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

318. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych $m, n \geq 2$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right].$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 307 (WT=1,27) i 308 (WT=3,22) z numeru 10/1995

Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	44,76
Piotr Lipiński	– Radom	41,89
Henryk Kornacki	– Augustów	39,01
Jerzy Witkowski	– Wodzisław Śl.	38,66
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	37,54

Serdeczne gratulacje przyjmuje pan Jan Ciach, który w efektownym stylu po raz piąty zdobywa sumę czterdziestu czterech punktów!

317. Przypuśćmy, że $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, \ldots, 7$. Funkcja F (trójmian kwadratowy) jest ściśle monotoniczna w co najmniej jednym z przedziałów $(-\infty; 4)$, $(4; \infty)$. Przyjmijmy w pierwszym przypadku

$$a = F(1), \quad b = F(2), \quad c = F(3), \quad d = F(4), \tag{1}$$

a w drugim –

$$a = F(4), \quad b = F(5), \quad c = F(6), \quad d = F(7). \tag{2}$$

Liczby a, b, c, d tworzą ciąg monotoniczny. Wartości $G(a)$, $G(b)$, $G(c)$, $G(d)$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego H, a więc muszą być parami równe. Zatem zarówno liczby a i d, jak i liczby b i c, muszą leżeć symetrycznie względem punktu, w którym trójmian kwadratowy G osiąga swą wartość ekstremalną. Tak więc $a + d = b + c$. Ale jeśli $F(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$), to

$$r = (a+d) - (b+c) = \begin{cases} \alpha(1^2 + 4^2 - 2^2 - 3^2) & \text{w przypadku (1),} \\ \alpha(4^2 + 7^2 - 5^2 - 6^2) & \text{w przypadku (2);} \end{cases}$$

w każdym przypadku $r \neq 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że podany w zadaniu warunek nie może być spełniony dla $n = 7$.

Natomiast dla $n = 6$ warunek ten jest spełniony, na przykład, przez wielomiany

$$F(x) = (2x-7)^2, \quad G(y) = (y-5)^2, \quad H(z) = (z-16)(z-400).$$

Zatem $n = 6$ jest największą liczbą o wymaganej własności.

318. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik danych liczb m i n oraz przyjmijmy $a = m/d$, $b = n/d$. Zachodzi równość

$$s := \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(n-k)m}{n}\right]. \tag{1}$$

Zatem

$$s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{km}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)m}{n}\right]\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(n-k)a}{b}\right]\right). \tag{2}$$

Oczywiście,

$$\frac{ka}{b} + \frac{(n-k)a}{b} = \frac{na}{b} = m. \tag{3}$$

Liczby a i b są względnie pierwsze, więc składniki sumy (3) są liczbami całkowitymi wtedy i tylko wtedy, gdy k dzieli się przez b. Wobec tego

$$\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(n-k)a}{b}\right] = \begin{cases} m & \text{dla } k \text{ podzielnych przez } b, \\ m-1 & \text{dla } k \text{ niepodzielnych przez } b. \end{cases}$$

W zbiorze $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ jest $d-1$ liczb podzielnych przez b oraz $n-d$ liczb niepodzielnych przez b. Równość (2) przybiera zatem postać

$$s = \frac{1}{2}\Big((d-1)m + (n-d)(m-1)\Big) = \frac{1}{2}\Big(mn - m - n + d\Big).$$

Otrzymane wyrażenie jest symetryczne względem m i n. To znaczy, że ta sama liczba jest też wartością sumy $s' := \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]$. Równość $s = s'$ jest właśnie tezą zadania.

Całkiem niedawno do naszej świadomości dotarła wiadomość, że na 36 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (Kanada '95) aż dwa zadania konkursowe (Zadanie 4 i zadanie 6) były autorstwa **Marcina E. Kuczmy**. Rzadko się zdarza, żeby na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej zostały wykorzystane dwa zadania spośród propozycji jednego kraju – a co dopiero jednego autora!

Warto przy okazji wspomnieć, że już dwukrotnie wcześniej M.E. Kuczma był autorem zadania użytego w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. Mamy nadzieję, że wśród uczestników **Klubu 44**, którzy rozwiązywali przecież całe krocie zadań autorstwa Marcina Kuczmy (może ktoś policzy, ile ich było), znajdą się kiedyś jego godni następcy.

Redakcja

Redaguje *Jerzy B. BROJAN*

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1996

Przypominamy treść zadań:

215. Kwadrat zbudowany jest ze sztywnych prętów o długości a połączonych w wierzchołkach przegubowo i sprężyście. Zmiana kąta w wierzchołku o α (tak, że staje się on równy $90° + \alpha$ lub $90° - \alpha$) powoduje wystąpienie momentu siły równego $k\alpha$ o zwrocie przywracającym kąt $90°$. Obliczyć okres małych drgań deformujących kwadrat do rombu, jeśli:
a) w wierzchołkach znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,
b) w środkach prętów znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,
c) każdy pręt ma masę m rozłożoną jednorodnie.

216. Ocenić minimalną wielkość liter na powierzchni Ziemi pozwalającą odczytać w świetle widzialnym napis z satelity krążącego na wysokości 400 km, przy użyciu przyrządów optycznych o rozmiarach nie przekraczających 1 m.
Uwaga. Istnieją metody komputerowego przetwarzania obrazów, które zmniejszają nieostrość i poprawiają zdolność rozdzielczą. W rozwiązaniu należy to pominąć.

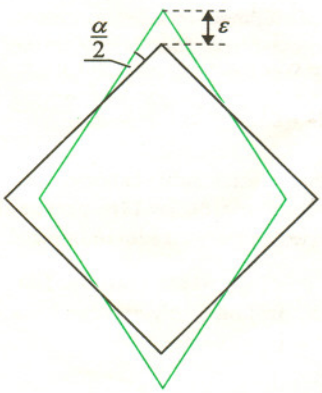
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 207 (WT=3,03) i 208 (WT=2,13) z numeru 11/1995

Aleksander Surma	– Myszków	33,64
Jarosław Łazuka	– Warszawa	31,54
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	26,68
Przemysław Gworys	– Częstochowa	26,55

W czołówce wydrukowanej w *Delcie* 3/1996 chochlik drukarski zmazał gratulacje dla 21. członka Klubu – pana Artura Gawryszczaka.

215. Załóżmy, że jedna z przekątnych rombu wynosi $a\sqrt{2} + 2\varepsilon$, gdzie ε jest małą wielkością – wtedy, jak łatwo wykazać, druga przekątna jest z dokładnością do pierwszego rzędu w ε równa $a\sqrt{2} - 2\varepsilon$, a kąt wierzchołkowy różni się od $90°$ o $\alpha = 2\sqrt{2}\varepsilon/a$. Energia sprężystości w każdym wierzchołku jest równa $k\alpha^2/2$ (analogicznie do znanego wzoru na energię „zwykłej" sprężyny), zatem łącznie mamy

$$E_{\text{spręż}} = 2k\alpha^2 = 16k\varepsilon^2/a^2\,.$$



Energię kinetyczną najprościej wyznaczyć dla przypadku a), kiedy jest ona równa $4mv^2/2 = 2mv^2$ (gdzie $v = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$). W przypadku b) potrzebne nam będzie przesunięcie środka pręta. Wynosi ono $\varepsilon/2$ wzdłuż każdej osi, czyli jego bezwzględna wartość jest równa $\varepsilon/\sqrt{2}$, prędkość środka pręta – $v/\sqrt{2}$, a energia kinetyczna całości – $2m(v/\sqrt{2})^2 = mv^2$. W przypadku c) do energii ruchu środka masy (takiej, jak w b)) należy dodać energię ruchu obrotowego, która dla pojedynczego pręta jest dana wyrażeniem

$$\frac{1}{2}\frac{1}{12}ma^2\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{12}mv^2\,.$$

Po dodaniu energii ruchu środka masy i pomnożeniu przez 4 otrzymujemy $E_{\text{kin}} = (4/3)mv^2$. Okres drgań zależy od współczynnika przy kwadracie przesunięcia w energii potencjalnej A i współczynnika przy kwadracie prędkości w energii kinetycznej B poprzez wzór $T = 2\pi\sqrt{B/A}$. Stąd w przypadku a) mamy $T = 2\pi a\sqrt{m/8k}$, w przypadku b) $T = 2\pi a\sqrt{m/16k}$, a w przypadku c) $T = 2\pi a\sqrt{m/12k}$.

216. Zdolność rozdzielcza przyrządów optycznych jest ograniczona przez efekty dyfrakcyjne. Kąt ugięcia fali na otworze o rozmiarach d (np. na soczewce) wynosi w przybliżeniu λ/d (gdzie λ – długość fali) i tyle wynosi kątowa zdolność rozdzielcza przyrządu. Dla satelity na wysokości h oznacza to liniową zdolność rozdzielczą równą $\delta \approx h\lambda/d$, czyli po podstawieniu $\lambda \approx 0{,}5$ μm i pozostałych danych otrzymujemy $\delta \approx 0{,}2$ m. Aby można było odczytać napis, wielkość liter zapewne musi być około 3 razy większa, czyli równa około 0,6 m.

Rozwiązanie zadania M778. Trzeba określić funkcję f wewnątrz kraty. Niech $(x, y) \in K_N$. Rozważymy cząstkę błądzącą losowo po kracie. Startuje ona z punktu (x, y) i odtąd w każdym ruchu zmienia swoje położenie o wektor $[0,1]$, $[0,-1]$, $[1,0]$ lub $[-1,0]$ (o każdy z nich z prawdopodobieństwem równym 1/4). Poszczególne ruchy są niezależne. Gdy cząstka znajdzie się po raz pierwszy w punkcie należącym do brzegu kraty, zatrzymuje się. Czytelnik zechce samodzielnie wykazać, że zdarzy się to z prawdopodobieństwem 1 (pomocne może być rozwiązanie zadania **M 771** z *Delty* 5/1996 o grze w orła i reszkę).

Niech $Z_{x,y}$ oznacza wartość funkcji g w punkcie, w którym cząstka startująca z punktu (x, y) się zatrzymała (jest to, oczywiście, pewna zmienna losowa). Połóżmy $f(x, y) = \mathrm{E}Z_{x,y}$. Oczywiście, $f(x, y) = g(x, y)$ dla $(x, y) \in B_N$ (bo wtedy cząstka od razu się zatrzymuje).

Pozostaje sprawdzić warunek pseudoharmoniczności. Niech $P_{x,y;a,b}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że cząstka startująca z punktu (x, y) zatrzyma się w punkcie (a, b). Na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

$$f(x,y) = \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y;a,b} = \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)\left(\frac{1}{4}P_{x+1,y;a,b} + \frac{1}{4}P_{x-1,y;a,b} + \frac{1}{4}P_{x,y+1;a,b} + \frac{1}{4}P_{x,y-1;a,b}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x+1,y;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x-1,y;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y+1;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y-1;a,b}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}Z_{x+1,y} + \mathrm{E}Z_{x-1,y} + \mathrm{E}Z_{x,y+1} + \mathrm{E}Z_{x,y-1}\right) = \frac{1}{4}\Big(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)\Big),$$

co kończy dowód.