Co to są funkcje tworzące?

Włodzimierz BIELIŃSKI

Dziwne są drogi ludzkich poszukiwań. Rozszerzamy swoją wiedzę na dany temat, badamy go długo i dokładnie. W końcu stwierdzamy, że chyba już nic więcej nie osiągniemy... i wtedy przychodzi nam z pomocą jakaś zupełnie inna, pozornie nie związana z badaną przez nas, dziedzina. W kombinatoryce taką niezwykłą pomocą są właśnie funkcje tworzące – narzędzie rodem z analizy matematycznej.

Funkcją tworzącą dla ciągu $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ nazywamy funkcję zmiennej x daną wzorem $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Na funkcjach tworzących można wykonywać różne operacje, np. jeśli $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, to

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n;$$

$$c \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n;$$

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{gdzie } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k};$$

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n .$$

Oczywiście, wszystkie powyższe działania są wykonalne tylko wtedy, gdy szeregi reprezentujące funkcje $A(x)$ i $B(x)$ są zbieżne w pewnym otoczeniu zera. W przeciwnym przypadku trudno w ogóle mówić o funkcjach. W naszych zastosowaniach nie będziemy jednak sprawdzać zbieżności szeregów. Okazuje się bowiem, że jeśli interesują nas tylko współczynniki, to możemy traktować $A(x)$ i $B(x)$ jako tzw. *szeregi formalne*.

Czasem funkcję tworzącą danego ciągu można bez trudu opisać w prostszy sposób korzystając z określonych wyżej działań i znając szereg geometryczny oraz dwumian Newtona. Oto przykłady. Jeśli ciąg a_n jest geometryczny, $a_n = aq^n$, to $A(x) = a \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \frac{a}{1-qx}$. Jeśli $a_n = n$, to $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n = x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. Jeśli wreszcie $a_n = \binom{m}{n}$ – umawiamy się, że $\binom{m}{n} = 0$ dla $n > m$ – to wtedy $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$.

Nieco innego podejścia wymagają funkcje tworzące ciągów określonych rekurencyjnie, takich jak np. liczby Fibonacciego ($F_0 = F_1 = 1$, oraz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$) czy liczby Catalana ($c_0 = 0$, $c_1 = 1$, i $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$ dla $n \geq 2$).

Liczby Catalana pojawiają się w kilku zagadnieniach kombinatorycznych, na pozór ze sobą nie powiązanych. Więcej o tym – w *Delcie* za cztery miesiące.

Nietrudno zauważyć, że dla liczb Fibonacciego mamy

$$xF(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots ,$$
$$x^2 F(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + \ldots .$$

Co (nie) istnieje w fizyce

Krzysztof REJMER

– Do was mówię, hej paladynie! – powtórzył Karol Wielki. – Jakże to być może, byście nie ukazali twarzy swemu królowi?

Głos, wydostający się spod dolnej przyłbicy, zabrzmiał teraz czysto i mocno.

– Albowiem nie istnieję, sire.

– A to dopiero! – wykrzyknął cesarz. – Teraz mamy więc w wojsku jeszcze i rycerza, który nie istnieje! Pokażcie no się trochę.

Agilulf zdawał się wahać przez krótką chwilę, po czym zdecydowanym, choć powolnym ruchem uniósł przyłbicę. Hełm był pusty. Wewnątrz białej zbroi z tęczowym pióropuszem nie było nikogo. – No, no, a to dziwy! – rzekł Karol Wielki. – I jakże to potraficie służyć, skoro was nie ma?

– Siłą woli i wiarą w naszą świętą sprawę!

– A jakże, a jakże, dobrze mówicie; tak się spełnia swój obowiązek. Jak na kogoś, kto nie istnieje, to zuch z was rycerzu!

Italo Calvino
„Rycerz nieistniejący"
tłum. Barbara Sieroszewska

Problem istnienia lub nieistnienia jest w fizyce i innych naukach przyrodniczych bardzo subtelny. Bo cóż to znaczy istnieć? Jakie kryterium jest decydujące? Przede wszystkim trzeba odpowiedzieć na pytanie, co bada fizyka: otaczający nas świat czy też raczej jego modele. W przypadku eksperymentu sprawa wydaje się na pozór prosta – badamy rzeczywiste obiekty istniejące w przyrodzie. Ale czy na pewno? Badanie elektronów zakłada ich istnienie. W większości przypadków eksperymentator tak naprawdę sprawdza poprawność przyjętego modelu, więc choć związek z jakąś niezależną od nas rzeczywistością wydaje się oczywisty, to jednak zarówno teoretyk, jak i eksperymentator zajmują się raczej modelami rzeczywistości. Nawet przy skrajnie realistycznej postawie nigdy nie można wykluczyć, że ten sam zakres zjawisk może zostać wytłumaczony w ramach całkiem różnych modeli.

To, oczywiście, nie oznacza, że problem istnienia lub nieistnienia wygląda w fizyce tak samo jak w matematyce. Matematyka nie interesuje to (a przynajmniej nie musi), czy pojęciom, którymi się zajmuje, odpowiada jakaś inna rzeczywistość.

Tymczasem fizyk jest zmuszony odrzucić nawet najpiękniejszą i logicznie spójną teorię, jeśli pozostaje ona w rażącej sprzeczności z doświadczeniem. A zatem problem istnienia sprowadza się do użyteczności pojęć zastosowanych do opisu przyrody, a także do tego, czy są one konieczne (może się okazać, że to samo można wytłumaczyć inaczej, na przykład prościej). Pogląd na istnienie lub nieistnienie jakiegoś obiektu w fizyce jest zmienny historycznie ze względu na gromadzenie się wciąż nowych faktów, doskonalenie techniki doświadczalnej czy też gwałtowną zmianę paradygmatu, co wprawdzie niezbyt często, ale także się zdarza. Pamiętajmy również i o tym, że najczęściej nowa teoria zawiera w sobie starą jako pewien przypadek graniczny, nie tyle odrzuca ją, ile ogranicza zakres stosowalności. Całkowite odrzucenie jest raczej rzadkością.

O nieistnieniu można mówić w fizyce na kilku różnych poziomach. Chętnie posługujemy się takimi pojęciami jak gaz doskonały, ciało doskonale czarne, ciało sztywne, punkt materialny, ciecz nieściśliwa czy idealny kryształ, choć w przyrodzie nie istnieje nic, co by im odpowiadało w ścisłym znaczeniu; rzeczywiste obiekty zaledwie przypominają je lepiej lub gorzej i to w zależności od warunków doświadczenia. A oto inny aspekt tytułowego pytania: używamy z jednej strony takich pojęć jak atom i kryształ, z drugiej takich jak ciepło, energia i entropia. Pierwsze dwa mają inny status niż pozostałe trzy. Atom i kryształ to składniki materii, energia i entropia istnieją w inny, bardziej abstrakcyjny sposób niż tamte dwa. Możliwa jest „zmiana kategorii", na przykład przez długi czas wyobrażano sobie, że ciepło jest rodzajem substancji zawartej w ciałach, dziś wiemy, że jest to jeden ze sposobów przekazywania energii, a więc należy do tej drugiej, bardziej abstrakcyjnej kategorii. Tak więc choć ciepło nie istnieje jako substancja, to jednak istnieje jako forma przepływu energii.

Z punktu widzenia użyteczności możemy podzielić „nieistniejące byty fizyki" na dwie grupy: te, które „zanieistniały" i te, które nie zaistniały. Neologizm, którym się posłużyłem, jest chyba dość czytelny. Chodzi tu o pojęcia, których istnienie zostało kiedyś powszechnie zaakceptowane i miało moc wyjaśniania jakiegoś zjawiska przyrody, później jednak zakwestionowano je i odrzucono ich istnienie, na ogół dlatego, że nie wytrzymały konfrontacji z nowymi faktami doświadczalnymi.

Dodając do jedynki sumę prawych stron powyższych równości otrzymujemy

$$1 + xF(x) + x^2F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1} + F_{n-2})x^n = F(x).$$

Stąd $F(x) = 1/(1 - x - x^2)$. Dla ciągu liczb Catalana mamy

$$\begin{aligned} C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\Big)x^n + c_0 + c_1 x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\Big)x^n + c_0 + c_1 x = \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big)^2 + x = C^2(x) + x, \end{aligned}$$

czyli $C^2(x) - C(x) + x = 0$. Zatem $C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. Jaki znak należy wstawić w liczniku, okaże się już niedługo.

Funkcje tworzące są interesujące i ważne dzięki swym magicznym możliwościom. Poznamy teraz kilka z nich.

1. Wyznaczymy nierekurencyjne wzory na F_n i c_n.

Wiadomo, że jeśli funkcja $f(x)$ rozwija się w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Nie zawsze jest to skuteczna metoda znajdowania wzoru na a_n, gdyż czasem trudno jest znaleźć ogólny wzór na n-tą pochodną funkcji f w zerze.

Aby znaleźć jawny wzór na liczby Catalana, rozwiniemy w szereg potęgowy funkcję $g(x) = \sqrt{1-4x}$. Po kilku pierwszych różniczkowaniach zauważamy, że $g^{(n)}(0) = -2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$ (puryści zechcą ten fakt udowodnić). A ponieważ liczby Catalana są dodatnie, to odpowiedni we wzorze $C(x) = \frac{1 \pm g(x)}{2}$ jest znak minus. Zatem $C^{(n)}(0) = -\frac{g^{(n)}(0)}{2} = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$. Stąd, po prostym rachunku, mamy

$$c_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Na szczęście wzór na F_n można wyprowadzić przy użyciu prostszych środków. Sprytny Czytelnik łatwo poradzi sobie sam z nietrudnymi obliczeniami, rozkładając wymierną funkcję $F(x)$ na ułamki proste. Gotowy wynik (tzw. wzór Bineta) wygląda tak:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

2. Odkryjemy na nowo proste fakty kombinatoryczne.

Niech $A_n(x) = (1+x)^n$. Wtedy $A_n(x) = (1+x)A_{n-1}(x) = A_{n-1}(x) + xA_{n-1}(x)$. Porównując współczynniki przy x^k po obu stronach, mamy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Obliczając wartości wielomianu $A_n(x)$ dla $x = 1$ i $x = -1$, otrzymujemy znane tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

W podobny sposób można znaleźć rozmaite własności liczb Catalana. Na przykład, znając rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \sqrt{1+4x}$ i $h(x) = 1/f(x)$, można (porównując współczynniki przy x^n po obu stronach tożsamości $h(x)f(x) = 1$) udowodnić, że

$$\sum_{\ell=1}^{k} \ell c_\ell c_{k-\ell+1} = \frac{k+1}{2} c_{k+1}.$$

Możliwości tworzenia nowych wzorów przez proste porównywanie współczynników jest jeszcze wiele. Zainteresowanym proponujemy dalsze eksperymenty (warto zwrócić uwagę na rozwinięcie funkcji arcsin).

3. Obliczymy pewne ciekawe prawdopodobieństwo.

Wyobraźmy sobie, że przed kinem, w którym bilety są po 5 zł, ustawia się kolejka. Prawdopodobieństwo tego, że dowolna osoba ma monetę 5 zł, jest równe p, a banknot 10 zł – równe $(1-p)$. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą numer osoby, na której kolejka po raz pierwszy się zablokuje (wskutek niemożności wydania reszty). Można wykazać, że $P(X = 2n+1) = c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1}$.

W artykule „O kolejkach” napisanym wspólnie z K. Parolem (zob. *Delta* 10/1995) udowodniliśmy, że liczba dobrych (tzn. nie powodujących zatrzymania sprzedaży biletów) kolejek długości $2n$, w których n osób ma pięciozłotówki i n osób dziesięciozłotówki, jest równa c_{n+1}. Zdarzenie $\{X = 2n+1\}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze $2n$ osób tworzy jedną z owych c_{n+1} dobrych kolejek (dzieje się to z prawdopodobieństwem $c_{n+1}p^n(1-p)^n$), a na miejscu $(2n+1)$-szym znajdzie się osoba z dziesięciozłotówką.

Intrygująca jest suma $S = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2n+1)$. Jeśli kolejka „musi” się w którymś momencie zatrzymać, to powinno być $S = 1$ (zmienna X nie przyjmuje wartości parzystych). Obliczymy sumę S wykorzystując funkcje tworzące. Ponieważ $c_0 = 0$, więc $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^n = C(x)/x = (1-\sqrt{1-4x})/2x$. Wstawmy do tej równości $x = p(1-p)$ i pomnóżmy obie strony przez $(1-p)$. Otrzymamy wtedy

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1} = \frac{1-|1-2p|}{2p}.$$

Zatem dla $p \le \frac{1}{2}$, zgodnie z intuicją, jest $S = 1$. Jednak dla $p > \frac{1}{2}$ mamy $S = \frac{1}{p} - 1 < 1$, co oznacza, że kolejka może się nigdy nie zatrzymać. Prawdopodobieństwem takiego szczęśliwego przypadku jest $1 - S$.

Dla $p < \frac{1}{2}$ możemy obliczyć wartość oczekiwaną EX numeru osoby, na której kolejka się zatrzyma. We wzorze $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^n = (1-\sqrt{1-4x})/2x$ wstawmy $x = a^2$, pomnóżmy obie strony przez a, zróżniczkujmy względem a i na koniec wstawmy z powrotem $a^2 = x$. Dostaniemy równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_{n+1}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

Stąd, biorąc $x = p(1-p)$, otrzymamy bez kłopotu $EX = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1} = 1/(1-2p)$. Dla $p \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ mamy $EX \to \infty$, czyli blokady kolejki zdarzają się teoretycznie rzadko, co jest chyba faktem pocieszającym.

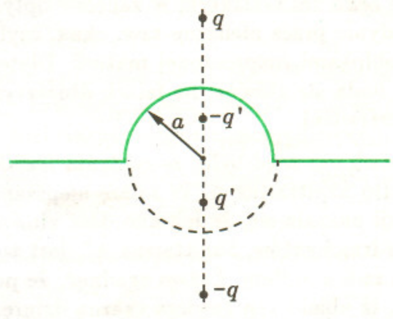
Czytelnik Wnikliwy zechce sprawdzić, że szeregi wyrażające S i EX są zbieżne dla interesujących nas wartości zmiennej $x = p(1-p)$, $p \in (0,1)$.

I tym optymistycznym akcentem pragnęlibyśmy zakończyć rozważania na temat funkcji tworzących z nadzieją, że przydadzą się one Czytelnikom w ich własnych poszukiwaniach.

Zostały one zastąpione innymi pojęciami, które lepiej nadawały się do opisu starych i nowych zjawisk. Do tej grupy należą: flogiston, cieplik, eter, deferenty i epicykle. Druga grupa to obiekty, których istnienia dowodzono bezskutecznie, choć z bardzo różnych przyczyn spodziewano się ich odkrycia. Niektóre z nich (zgodnie z obecnym stanem wiedzy) mogłyby istnieć (na przykład monopole magnetyczne lub tachiony), inne nie istnieją z całą pewnością; w tej grupie mieszczą się: perpetuum mobile (pierwszego i drugiego rodzaju) i słynny kamień filozoficzny. W przypadku obiektów, które mogłyby istnieć, lecz ich nie ma, nigdy nie będziemy mieć gwarancji, że kiedyś, w przyszłości ich istnienie nie zostanie jednak doświadczalnie dowiedzione.

W fizyce, tak jak w każdej ludzkiej działalności, zdarzają się także pomyłki i oszustwa (na przykład promienie N Blondlota, subelektrony czy telepatia). Jednak nauka (ta przez duże N) jest krytyczna w stosunku do samej siebie (czego nie można powiedzieć o wielu innych dziedzinach aktywności człowieka). Tym właśnie nauka różni się od paranauki, o czym niedawno w naszej ankiecie pisał Jerzy Kuczyński (*Delta* 1/1996). Tego rodzaju artefakty są więc szybko eliminowane i dlatego chyba nie warto tu o nich wspominać.

Rozwiązanie zadania F 432. Zadanie rozwiążemy metodą obrazów. Umieszczając ładunek $-q$ na osi symetrii po przeciwnej stronie płaszczyzny oraz ładunki $-q'$ i q', gdzie $q' = \frac{qa}{x}$, w punktach odległych o $x' = \frac{a^2}{x}$ tak, jak to pokazuje rysunek, spełniamy warunek znikania potencjału na powierzchni przewodnika.



Siła oddziaływania ładunku q z przewodnikiem jest równa sile jego oddziaływania z trzema fikcyjnymi ładunkami: $-q$, q' i $-q'$. Jest ona równa

$$F = q^2\left[\frac{xa}{(x^2-a^2)^2} - \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} + \frac{1}{4x^2}\right].$$