Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IX 1996

Zadania z matematyki nr 323, 324

Redaguje Marcin E. KUCZMA

323. Wyznaczyć wszystkie potęgi liczby 2 (o wykładniku całkowitym dodatnim), których zapis w siódemkowym układzie pozycyjnym składa się z samych jedynek.

324. Punkt G jest środkiem ciężkości czworościanu $ABCD$ wpisanego w sferę o środku O i promieniu R. Proste AG, BG, CG, DG przecinają tę sferę odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od A, B, C, D). Dowieść, że

$$\frac{1}{|GK|^2} + \frac{1}{|GL|^2} + \frac{1}{|GM|^2} + \frac{1}{|GN|^2} \geq \frac{4}{R^2}\,.$$

Zadanie **324** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z numeru 2/1996

Przypominamy treść zadań:

315. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Ile jest permutacji $\pi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, dla których nierówność $\pi(k) \geq k$ jest spełniona przez dokładnie dwie liczby $k \in \{1,\ldots,n\}$?

316. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie funkcyjne

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y)\,.$$

315. Permutacja rozpada się na cykle. W każdym cyklu najmniejsza liczba k spełnia nierówność $\pi(k) \geq k$. Jeśli więc permutacja π ma rozważaną w zadaniu własność, to jest cykliczna lub rozkłada się na dwa cykle.

Przypadek I. Są dokładnie dwa cykle. W każdym cyklu wszystkie elementy z wyjątkiem najmniejszego muszą spełniać nierówność $\pi(k) < k$; jeśli więc $k_1 < \ldots < k_r$ są wszystkimi elementami cyklu, to działanie permutacji π w jego obrębie jest już jednoznacznie wyznaczone – mianowicie wygląda tak: $k_r \to k_{r-1} \to \ldots \to k_1 \to k_r$. Zatem liczba badanych permutacji o dwóch cyklach jest równa liczbie podziałów zbioru n-elementowego na dwa (nierozróżnialne) niepuste podzbiory, czyli wynosi $2^{n-1} - 1$.

Przypadek II. Permutacja π jest cykliczna. Załóżmy, że $n \geq 3$. Niech m będzie najmniejszą liczbą i, dla której $\pi^i(n) \neq n - i$ (symbol π^i oznacza i-krotne złożenie $\pi \circ \ldots \circ \pi$). Zatem permutacja π działa tak:

$$n \to (n-1) \to (n-2) \to \ldots \to (n-(m-1)) \to$$
$$\to u_1 \to \ldots \to u_r \to (n-m) \to v_1 \to \ldots \to v_s \to n,$$

przy czym $u_1 \neq n - m$ (ciąg $u_1, \ldots, u_r$ jest więc niepusty); liczba m spełnia oszacowania $1 \leq m \leq n-2$. Dwoma elementami k spełniającymi nierówność $\pi(k) \geq k$ są: $k' = u_r$ oraz $k'' = v_s$ (ciąg $v_1, \ldots, v_s$ może być pusty, wówczas $k'' = n - m$). Pozostałe elementy muszą spełniać nierówność $\pi(k) < k$; stąd wynika, że $u_1 > \ldots > u_r$ oraz $v_1 > \ldots > v_s$. Dla ustalonego m permutacja π jest więc jednoznacznie wyznaczona przez wybór niepustego podzbioru $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n-m-1\}$ (pozostałe elementy utworzą zbiór $\{v_1, \ldots, v_s\}$, który może być pusty). Mamy $2^{n-m-1} - 1$ możliwości wyboru zbioru U. Zatem liczba permutacji cyklicznych o rozważanej własności wynosi

$$\sum_{m=1}^{n-2} (2^{n-m-1} - 1) = 2^{n-1} - n.$$

(Gdy $n = 2$, wówczas jedyna cykliczna permutacja zbioru $\{1,2\}$ nie spełnia postawionego warunku, więc uzyskany wynik $2^{2-1} - 2 = 0$ jest i tym razem prawidłowy.)

Uwzględniając wyniki obliczeń w przypadkach I i II otrzymujemy odpowiedź: liczba permutacji π, o które chodzi w zadaniu, jest równa

$$(2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} - n) = 2^n - (n+1)\,.$$

316. Załóżmy, że funkcja f spełnia podane równanie i przyjmijmy $a = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$. Łatwo sprawdzić, że wówczas funkcja

$$g(x) = f(x) - (ax + b)$$

też spełnia analogiczne równanie

$$xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y)\,, \tag{1}$$

wraz z warunkiem $g(0) = g(1) = 0$.

Kładąc w (1) $y = -x$ stwierdzamy, że $g(x) + g(-x) = 0$: funkcja g jest nieparzysta. Zatem funkcja $h(x) = xg(x)$ jest parzysta. Równanie (1), pomnożone stronami przez $(x+y)$, przybiera postać

$$(x+y)(h(x) - h(y)) = (x-y)h(x+y)\,. \tag{2}$$

Podstawiamy w (2) $y = x - 1$:

$$(2x-1)(h(x) - h(x-1)) = h(2x-1)\,. \tag{3}$$

Następnie podstawiamy w (2) $y = 1 - x$:

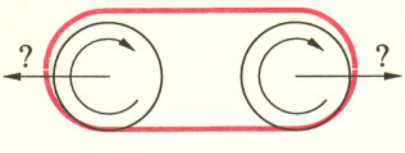
$$h(x) - h(1-x) = (2x-1)h(1) = 0\,. \tag{4}$$

Ale $h(1-x) = h(x-1)$, wobec parzystości funkcji h. Ze związków (3) i (4) wynika więc, że $h(2x-1) = 0$. Wobec dowolności x, funkcja h jest tożsamościowo równa zeru. Zatem także g jest funkcją tożsamościowo równą zeru, i ostatecznie

$$f(x) = ax + b\,.$$

Proste sprawdzenie wykazuje, że każda funkcja takiej postaci spełnia podane równanie.

221. Pętlę ze sznura o wytrzymałości W i masie na jednostkę długości ϱ nałożono na dwa walce o promieniu r obracające się z prędkością kątową ω (rys. 1). Jaka jest maksymalna wartość siły odsuwającej osie walców, przy której pętla nie ulegnie zerwaniu? Przyjąć, że siła oddziaływania między sznurem a walcami nie ma składowej stycznej (nie ma więc żadnego przekazu energii), a także nie występuje poślizg.



Rys. 1

222. Dwie cienkie powłoki sferyczne o promieniach r_1 i r_2 są ustawione koncentrycznie (pierwsza wewnątrz drugiej) i naładowane równomiernie rozłożonymi ładunkami Q_1 i Q_2, a w środku sfer znajduje się punktowy ładunek q. Jakie związki muszą spełniać q, Q_1 i Q_2, aby powłoki były mechanicznie stabilne, tzn. aby nie podlegały siłom ściskającym ani rozciągającym?

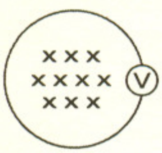
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1996

Przypominamy treść zadań

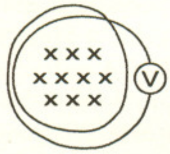
213. Aby zwiększyć wysokość osiąganą przez zabawkę „jo-jo", grający może wykonywać ruchy pionowe ręką trzymającą górny koniec nitki.

a) Załóżmy, że w czasie przejścia „jo-jo" przez dolne położenie (gdy nitka jest całkowicie rozwinięta) górny koniec nitki jest nieruchomy i w kolejnych przejściach znajduje się na jednakowym poziomie. Czy można tak nim poruszać w czasie wspinania się i opadania zabawki, aby ją rozpędzić, tzn. aby zwiększyć prędkość kątową w dolnym położeniu? Jeśli tak, to opisać prawidłową metodę.

b) Opisać najskuteczniejszą metodę rozpędzenia zabawki, jeśli w jej dolnym położeniu górny koniec nitki nie musi być nieruchomy.



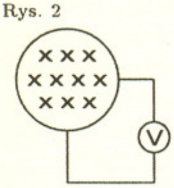
Rys. 2



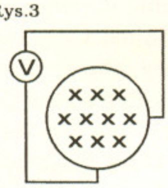
Rys.3

214. W ograniczonym obszarze przestrzeni występuje zmienne pole magnetyczne wytworzone przez zewnętrzne źródło, tak że woltomierz włączony w obwód opasujący ten obszar (zob. rys. 2; na rysunkach pole zostało oznaczone krzyżykami) wskazuje przez pewien czas 1 V. Jakie napięcie wskaże w takiej sytuacji:

a) woltomierz włączony w podwójną pętlę (rys. 3), b) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 4, c) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 5, d) woltomierz dołączony do pętli z drutu nadprzewodzącego według rysunku 4?



Rys. 4



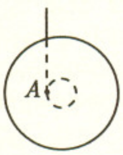
Rys.5

213. a) Zbadajmy ruch zabawki najpierw w górę, a potem w dół w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z rozwiniętą częścią nici. Jeśli przyspieszenie układu jest równe a (dodatni zwrot w górę), to siła bezwładności ma dodaje się do siły ciężkości, a równanie ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu A (rys. 6) ma postać

$$I\varepsilon = -m(g + a)r\,, \tag{1}$$

gdzie I – moment bezwładności zestawu krążków względem osi A, r – promień wewnętrznej ośki, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ – przyspieszenie kątowe (ujemne, jeśli początkową prędkość kątową uważamy za dodatnią). Po scałkowaniu względem czasu i wprowadzeniu parametru $R = I/mr$ otrzymujemy

$$R\omega = -gt - v + \mathrm{const}\,, \tag{2}$$



Rys. 6

gdzie v – prędkość układu. W chwili początkowej – zgodnie z przyjętym założeniem – ta prędkość jest równa zeru, a podstawiając $t = 0$, $\omega = \omega_0$ mamy $\mathrm{const} = R\omega_0$. Jeśli otrzymane równanie scałkujemy jeszcze raz, to dla całego ruchu w górę i w dół mamy $\int v\,dt = 0$ (z założenia o jednakowym poziomie), a także $\int \omega\,dt = 0$ (tyle samo obrotów w górę, co w dół). Ze wzoru $0 = -\frac{1}{2}gt^2 + R\omega_0 t$ znajdujemy $t = 2R\omega_0/g$, a powracając do równania (2) widzimy, że końcowa prędkość kątowa jest równa $-\omega_0$ niezależnie od przebiegu funkcji $v(t)$. Zatem w ten sposób nie można rozpędzić zabawki.

b) Aby przekazać energię układowi, trzeba poruszając nitką wykonać dodatnią pracę. Należy więc przesuwać nitkę do góry wtedy, gdy jej siła napięcia jest duża (tzn. w dolnym położeniu, bo tam następuje zwrot ruchu i związane z nim szarpnięcie), a do dołu w innych fazach ruchu. Ponieważ szarpnięcie nici przez „jo-jo" trwa krótko, więc optymalnie jest wykonać wtedy szybki ruch nitką do góry, a powracać w dół można wolniej.

214. W przypadku a) woltomierz wskaże 2 V, gdyż podwójną pętlę można uznać za szeregowe połączenie dwóch pętli (zasada transformatora). W przypadkach b) i c) natężenie prądu płynącego w drucie oporowym wynosi $I = (1\ \mathrm{V})/R$ (gdzie R – opór pętli). Rozważmy obwód z rysunku 4 składający się z gałęzi zawierającej woltomierz oraz ćwiartki pętli oporowej; ponieważ obwód ten nie obejmuje pola, więc krążenie pola elektrycznego wzdłuż niego jest równe zeru, czyli napięcie na woltomierzu równa się napięciu na ćwiartce pętli, równemu $I \cdot (1/4)R = 0{,}25$ V. W podobny sposób na rysunku 5 otrzymujemy 0,75 V (uwaga – nie ma tu sprzeczności, gdyż ze względu na wirowe pole elektryczne nie można mówić o „różnicy potencjałów" między punktami dołączenia woltomierzy). W przypadku d) pole własne pętli nadprzewodzącej równoważy zmiany pola zewnętrznego, tak że całkowity strumień przez pętlę pozostaje stały, a SEM indukcji wynosi zero. Linie pola samej pętli są liniami zamkniętymi, więc muszą „powracać" na zewnątrz pętli wywołując indukcję w obwodzie z woltomierzem. Jeśli przyjąć, że 1/4 strumienia powraca wewnątrz tego obwodu (co zależy, oczywiście, od ułożenia przewodów i jest ściśle tylko wtedy, gdy prawy i dolny odcinek są odsunięte daleko od pętli), to otrzymujemy znów 0,25 V.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 205 (WT=2,98) i 206 (WT=2,50) z numeru 10/1995

Aleksander Surma	– Myszków	33,64
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	26,68
Jarosław Łazuka	– Warszawa	26,39
Przemysław Gworys	– Częstochowa	25,49

Panu A. Surmie doliczono punkty za zadanie 204, którego rozwiązanie nadeszło z niezawinionym przez niego opóźnieniem.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 305 (WT=3,84) i 306 (WT=1,00) z numeru 9/1995

Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	42,20
Adam Czornik	– Bytom	41,29
Piotr Lipiński	– Radom	39,33
Henryk Kornacki	– Augustów	36,45
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	36,40
Jerzy Witkowski	– Wodzisław Śl.	36,23