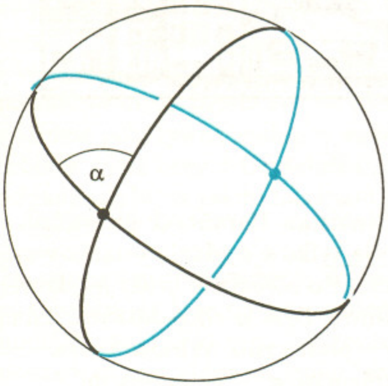
# Pole trójkąta sferycznego i wzór Eulera

*Marek KORDOS*

Na sferze za proste uważa się jej geodezyjne. A geodezyjne jakiejś powierzchni to najmniej krzywe linie na niej. A najmniej krzywymi liniami na sferze (powierzchni kuli) są jej okręgi wielkie. Dwie takie „proste" przecinają się w dwóch antypodycznych punktach (antypodyczne punkty to takie, że łączący je odcinek przechodzi przez środek sfery) i dzielą sferę na cztery dwukąty (tak! na sferze są dwukąty). Dwukąt ma dwa kąty, ale zawsze są one równe.

Pole dwukąta o kącie $\alpha$ jest równe $2\alpha \cdot R^2$, gdzie $R$ to promień sfery. Bardzo łatwo to uzasadnić. Pole dwukąta jest w oczywisty sposób proporcjonalne do jego kąta. Gdy zaś kąt wzrośnie do $\pi$, dwukąt stanie się półsferą, czyli będzie miał pole $2\pi \cdot R^2$ i już.

Dla obliczenia pola trójkąta sferycznego wygodnie będzie się zająć sferą jednostkową – wynik pomnożymy przez $R^2$ i będzie dobrze dla dowolnej sfery, gdyż każda sfera jest podobna do sfery jednostkowej w stosunku $R$.




Rys. 1

Rys. 2

Niech interesujący nas trójkąt ma kąty $\alpha, \beta, \gamma$. Cała sfera (o polu $4\pi$) to suma sześciu dwukątów – po dwa odpowiadające każdemu z kątów – minus cztery pola trójkątów, bo jest ich dwa (na rysunku 2 jeden jest czarny, a drugi kolorowy) i każdy jest przykryty trzy razy, więc dwa z nich trzeba usunąć. Oznaczając pole trójkąta przez $\Delta$ mamy

$$2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 4\pi + 4\Delta\,.$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,,$$

a dla dowolnej sfery to samo pomnożone przez $R^2$.

Ponieważ każdy wielokąt składa się z trójkątów, więc pole $P$ $n$-kąta sferycznego daje się obliczyć ze wzoru

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi\,,$$

ewentualnie pomnożone przez $R^2$ ($\alpha_i$ to kąty $n$-kąta).

Wynika stąd bardzo sprawnie wzór Eulera. Trzeba tylko zauważyć, że wielościan wypukły ma tę własność, iż da się tak „nadmuchać", by stał się sferą. Inaczej: oglądając go z wewnątrz widzimy jego ściany, krawędzie i boki jakby namalowane na jakiejś sferze (tak jak w starożytności na sferze widziano wszystkie gwiazdy).

# Twórca współczesnej geometrii – Mikołaj Łobaczewski (1792–1856)

(artykuł zamieszczony w nr. 61 *Trybuny Ludu* z 3 marca 1956 roku przypomniany nam przez Mieczysława Karpińca)

*Karol BORSUK*

Wśród idei pozostawionych nam w spuściźnie przez świat antyczny, najbardziej pewnymi, i w pewnym stopniu ostatecznymi, wydają się być idee geometrii elementarnej, sformułowane przez znakomitego matematyka wczesnej epoki hellenistycznej – Euklidesa (około r. 300 przed n.e.) w dziele pt. „Elementy". Od przeszło dwóch tysięcy lat dzieło to zachowuje swą wartość naukową i dotychczas kurs geometrii wykładany w szkole średniej w zasadzie nie wykracza poza jego zakres.

Euklides oparł wykład geometrii na niewielkiej liczbie tzw. aksjomatów przyjętych bez dowodu, starając się wyprowadzić z nich całą resztę rozwiniętej przez siebie teorii. Jak wiadomo, geometria elementarna stanowi podstawę znacznej części przyrodoznawstwa, podstawę niezmiernie pewną, nigdy bowiem bezpośrednie doświadczenie nie doprowadziło do wyników niezgodnych z twierdzeniami geometrii.

Potrzeba było niezmiernej odwagi myślenia, by zdobyć się na pogląd, że koncepcja geometrii przyjęta przez Euklidesa nie jest jedyna, lecz że obok niej postawić można koncepcje innych geometrii, przy czym nie ma pewności, która z nich lepiej opisuje zjawiska świata rzeczywistego. Ten niezmiernie rewolucyjny krok w dziejach myśli ludzkiej dokonany został przez genialnego matematyka rosyjskiego Mikołaja Łobaczewskiego, którego setna rocznica śmierci obchodzona jest w tym roku przez naukę światową.

Mikołaj Łobaczewski urodził się w roku 1792 w Niżnim Nowgorodzie (dziś Gorki) jako syn skromnego urzędnika ziemskiego. Dla czytelnika polskiego interesująca będzie może wiadomość, że ojciec Mikołaja Łobaczewskiego – Jan (Iwan) Łobaczewski pochodził z Polski. Według oświadczenia córki Mikołaja Łobaczewskiego, W. Achłopkowej, Jan Łobaczewski był „katolikiem, architektem, wychodźcą z Carstwa Polskiego".

Całe życie spędził Mikołaj Łobaczewski w Kazaniu, gdzie ukończył szkołę średnią, a następnie (w roku 1811) uniwersytet ze stopniem magistra nauk matematyczno-fizycznych. W roku 1816, a więc jako 24-letni młodzieniec, został profesorem matematyki uniwersytetu w Kazaniu.

W tym też czasie zainteresowania jego zwracają się ku geometrii elementarnej.

Wśród aksjomatów, na których Euklides zbudował swą geometrię, występuje tzw. „postulat V", zwany też aksjomatem Euklidesa. Aksjomat ten mówi (w sformułowaniu nieco uproszczonym), że o ile w płaszczyźnie dana jest prosta i punkt na niej nie leżący, to przez punkt ten można poprowadzić w tej płaszczyźnie dokładnie jedną prostą, która prostej danej nie przecina (a więc tzw. prostą równoległą do prostej danej). Aksjomat ten był przedmiotem długotrwałych i wszechstronnych badań, przypuszczano bowiem, że jest on dla zbudowania geometrii zbyteczny, gdyż daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów przyjętych przez Euklidesa. Liczne próby podania dowodu tego aksjomatu, podjęte przez wielu matematyków poczynając od starożytności (Proklus), a kończąc na znakomitym matematyku francuskim wieku XIX, Legendre, zawiodły.

Również i Mikołaj Łobaczewski próbował początkowo przeprowadzić tego rodzaju dowód, lecz szybko zdał sobie sprawę z daremności tych wysiłków i powziął niezmiernie śmiałą myśl zbudowania nowej geometrii, różnej od geometrii Euklidesa, w której aksjomat Euklidesa nie byłby spełniony. W roku 1826 przedstawił on wyniki swych badań na posiedzeniu Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu w Kazaniu, wygłaszając odczyt pt. „Rozważania nad podstawami geometrii". W odczycie tym przedstawił on po raz pierwszy koncepcję nowej geometrii, istotnie różnej od tradycyjnej geometrii Euklidesa. W roku 1829 ukazała się w rocznikach uniwersytetu w Kazaniu rozprawa Mikołaja Łobaczewskiego pt. „O zasadach geometrii", w której wyłożył on zarys stworzonej przez siebie teorii.

Prawdopodobnie znaczna część Czytelników niniejszego artykułu odczuła pewne rozczarowanie, dowiadując się, że wielkie odkrycie Łobaczewskiego polega na zbudowaniu teorii różniącej się od geometrii Euklidesa jedynie zaprzeczeniem jednego z aksjomatów, którego treść wydaje się być interesująca jedynie dla szczupłej liczby specjalistów. Wielu osądzi, że dzieło Łobaczewskiego było przysłowiową „burzą w szklance wody", zupełnie niewspółmierną

Zatem możemy dowodzić wzoru Eulera dla *poligonizacji sfery*, czyli podziału jej na wielokąty. Oznaczmy przez $S$ liczbę wielokątów, przez $K$ liczbę ich boków (pamiętajmy: każdy bok jest bokiem dwóch wielokątów) i przez $W$ łączną liczbę ich wierzchołków ($S, K, W$ to również, odpowiednio, liczba ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu).

Dowiedziemy zatem wzoru Eulera nie tylko dla wielościanów wypukłych, lecz także dla wszystkich tych, które do sfery „rozdmuchać" się dadzą.

Dodając ich pola, obliczone z uzyskanego przed chwilą wzoru, otrzymujemy

$$4\pi = 2\pi \cdot W - 2K \cdot \pi + S \cdot 2\pi\,.$$

Z lewej strony jest pole całej sfery. Pierwszy wyraz z prawej to suma wszystkich kątów wszystkich wielokątów – w każdym z wierzchołków składają się one na kąt pełny. $2K$ to suma „enów", liczby boków każdego z wielokątów – jest ona dwa razy większa od liczby krawędzi, co już wcześniej zauważyliśmy. Wreszcie $S$ to liczba wielokątów; bierzemy ją $2\pi$ razy, bo we wzorze występowała dwójka.

To już koniec, bo dzieląc otrzymaną równość przez $2\pi$ otrzymujemy wzór Eulera, czyli

$$W - K + S = 2\,.$$

## Suplement do Barańczaka

Nie pamiętam, w jakim magazynie Stanisław Barańczak prowadził rubrykę „Książki najgorsze" – znam ją tylko z wydania książkowego. Wyszydzał tam figlarny styl, świadczące o nieuctwie braki językowe, pustosłowie, sztuczność – wszelką szmirę. Dziś ja chcę dorzucić jedną pozycję do tej niezbyt chlubnej listy – podręcznik Włodzimierza Janiaka pod tytułem *Wstęp do „Mathematica" – programu do obliczeń matematycznych*, wydany przez Wydawnictwo PLJ w Warszawie (1994).

Lektura tej książki przypomniała mi wymyśloną przeze mnie postać Profesora Idziego Tyzroba. Idzi Tyzrób zaczął swą edukację od studiów na uniwersytecie w Murzasichlu, gdzie został przyjęty po udzieleniu poprawnej odpowiedzi na pytanie „Kto tam?". Gdy okazało się, że nie umie pisać ani czytać, otrzymał dyplom magistra i zapisano go do szkoły powszechnej. Opowiadał w wiele lat potem, że te kilkanaście lat, jakie spędził w szkole na zgłębianiu elementarza i rachunków w zakresie do 100, należało do najpiękniejszych i najbardziej twórczych okresów jego życia.

Po ukończeniu szkoły powszechnej Idzi, teraz już z tytułem docenta nadzwyczajnego, wyjechał na studia doktoranckie do Milanówka, gdzie kontynuował rozpoczętą w szkole powszechnej naukę. Z biegiem lat doszedł do wspaniałych rezultatów, z których najważniejszy to odkrycie *operatorów leniwych*, znanych też pod nazwą operatorów Tyzroba. Mówimy, że $A$ jest operatorem leniwym, gdy $A(x)$ mogłoby się równać $y$, gdyby mu się tylko chciało. Wprowadzenie operatorów leniwych zrewolucjonizowało całą matematykę. Gdy bowiem rozwiązujemy dowolne zadanie $U$, wystarczy znaleźć odpowiadający mu operator leniwy $Len(U)$.

Następnie zaś jasno widzimy, że nie ma najmniejszej potrzeby, by zadanie $U$ miało być rozwiązane jeszcze dzisiaj i odkładamy robotę do następnego dnia. Zachodzi przy tym następujące

Twierdzenie Tyzroba (*Tyzrobian Theorem, Tyzrobische Satz, Thèoréme Tyzrobienne, Tyzrobowskaja Tieorema*): Dla każdego zadania istnieje odpowiadający mu operator leniwy.

Mimo braku wykształcenia humanistycznego (a także jakiegokolwiek innego), braku erudycji i uzdolnień, polotu, sumienności, a także elementarnej przyzwoitości – profesor Tyzrób pisywał artykuły, eseje i książki na tematy socjologiczne, filozoficzne i filatelistyczne. Gazety, w których publikował Profesor, były kupowane już od wczesnych godzin rannych, a jego książki stały się podporą niejednej półki bibliotecznej!

Tu (uwaga, uwaga!) koniec żartów. Program (a raczej *pakiet*) *Mathematica* jest jednym z najlepszych i najbardziej uniwersalnych programów do matematyki teoretycznej, zarówno na poziomie szkolnym, uniwersyteckim, jak i politechnicznym. Został stworzony przez Stephena Wolframa i chyba każdy, kto z tego programu korzysta, zna oryginalny podręcznik Wolframa.

Nie sprawdziłem, ale Włodzimierz Janiak jest chyba jednym z uczniów Idziego Tyzroba. Po pierwsze, wydana pod jego (p. Janiaka) nazwiskiem książka „Wstęp do Mathematica” jest zwykłym plagiatem podręcznika Wolframa. To jest obecnie karalne. Spróbujmy jednak wybaczyć Włodzimierzowi Janiakowi i Wydawnictwu PLJ to naruszenie prawa autorskiego. Akurat to można od biedy przeliczyć na pieniądze i liczę na to, że sprawa znajdzie pozytywny epilog w sądzie. Gorsze jest to, że Autor kpi sobie w żywe oczy z Czytelnika – trudno znaleźć inne określenie na oddanie stylu, w jakim napisana jest ta książka. Stosowne przykłady – niżej.

Jak zły uczeń na klasówce, Włodzimierz Janiak nie rozumie, co przepisuje. A że nie zna matematyki nawet w zakresie szkoły podstawowej, efekt tego ściągania można streścić znanym powiedzeniem, które najlepiej brzmi po rosyjsku: „i smieszno, i straszno”. Wydaje się niewiarygodne, żeby Autor(?) książki o matematyce wyższej miał kłopoty z materiałem VI klasy szkoły podstawowej. A jednak! Wymienię tylko co bardziej pikantne przykłady.

Zamiast „rozłóż liczbę na czynniki pierwsze” pan Janiak używa na stronie 36 zwrotu „zredukuj iloczyn do składników”, a na stronie 157 „podaj listę czynników i ich wykładniki”. Wynik to „podzielniki podstawowe” (str. 301). Obliczenia z dokładnością do iluś tam cyfr po przecinku nazywa „z precyzją do $n$ dekad” (str. 41 i wiele razy dalej), najzwyklejszy czworokąt to „kwadraterala” lub „kwadratela” (str. 127 i dalsze), reszta z dzielenia $k$ przez $n$ nazywana jest „pozostałością” lub „pozostałościami” (str. 155, 302), zamiast „w układzie pozycyjnym” mamy PRL-owsko brzmiący zwrot „na bazie” (str. 155). Ciekawe jest też określenie wieloboków – to „wielonarożne figury geometryczne” (str. 259). W wyrażeniu postaci $C_b^a$ liczba $a$ jest u Włodzimierza Janiaka „nadpisem”, $b$ – „podpisem”. Ciekawe, jak Autor zrobiłby „wykres trójwymiarowy na płaszczyźnie” (str. 179)! Konia z rzędem temu, kto domyśli się, że „wykreśl wszystkie człony między licznikiem i mianownikiem” znaczy „skrócić ułamek”, a „rozłącz człony z najprostszym mianownikiem” to po prostu „rozłóż na ułamki proste”. Zaś pół królestwa i rękę córki oferowałbym temu, kto

z przemawiającymi do wyobraźni odkryciami Kopernika, Newtona, Darwina czy Einsteina. Należy jednak wziąć pod uwagę, że odkrycie Łobaczewskiego wstrząsnęło najbardziej ustalonymi poglądami, uważanymi za prawdy tak bezsporne, że wątpienie o nich wydawało się niedorzecznością.

Obecnie przyzwyczailiśmy się do myśli, że jakkolwiek doświadczenie potwierdza stale prawdziwość tez geometrii Euklidesa, to jednak można przypuszczać, że fakt ten nie tyle jest następstwem absolutnej zgodności tej teorii z rzeczywistością, ile jedynie tego, że odtwarza ona rzeczywistość z tak dobrym przybliżeniem, że odchyleń tych nie dostrzegamy. W czasach jednak Łobaczewskiego myśl, że geometria Euklidesa opisuje jedynie w przybliżeniu własności przestrzeni, w której odbywają się zjawiska świata materialnego, i że może istnieć geometria istotnie różna od geometrii Euklidesa – była niezmiernie rewolucyjna. Wielki matematyk niemiecki Gauss, który w początku XIX wieku, niezależnie od Łobaczewskiego, doszedł do podobnych koncepcji, zrezygnował z ich opublikowania z obawy przed krytyką, którą mogłyby wywołać idee tak różne od ustalonych poglądów.

Obawy Gaussa były uzasadnione. Wystąpienie Łobaczewskiego nie spotkało się z uznaniem współczesnych. Uważano je za dziwactwo i nonsens pozbawiony naukowego znaczenia i przeważnie pomijano je milczeniem lub zbywano złośliwymi docinkami. Podobnie zresztą świat ówczesny odniósł się do opublikowanych w parę lat później prac wybitnego matematyka węgierskiego J. Bolyaia, który niezależnie od Łobaczewskiego zbudował geometrię opartą na zaprzeczeniu aksjomatu Euklidesa. Obojętność współczesnych i złośliwa krytyka zniechęciły Bolyaia do dalszych badań nad geometrią i spowodowały jego odsunięcie się od działalności naukowej. Natomiast Łobaczewski nie załamał się i przez całe swe życie walczył uparcie o zwycięstwo swych idei. Ogłosił on w latach 1829–1855 kilka rozpraw, w których poszerzał i coraz głębiej uzasadniał odkrytą przez siebie nową geometrię, wskazując poza tym na jej zastosowania (w rachunku całkowym). Przypominał Kopernika, pracując w odosobnieniu, daleko od głównych ośrodków myśli naukowej, rozwijając z godnym podziwu hartem ducha swą nową, sprzeczną z ustalonymi poglądami, rewolucyjną koncepcję. Ostatnią swą pracę pt. „Pangeometria” dyktuje u schyłku swego życia (rok 1855) schorowany i prawie niewidomy. Było to w momencie, w którym triumf jego idei był już bliski.

Koncepcja Łobaczewskiego stanowiła pierwszy wielki wyłom w poglądach na istotę geometrii, otwierający nowe, szerokie horyzonty. Po tym wyłomie wkrótce nastąpiły dalsze.

Niech mi będzie wolno zacytować za matematykiem radzieckim W. Kostinem, matematyka angielskiego W. Clifforda, który w następujący sposób charakteryzuje znaczenie dzieła Łobaczewskiego dla naukowej myśli współczesnej: „Czym był Vesale dla Galena, czym Kopernik dla Ptolemeusza, tym był Łobaczewski dla Euklidesa. Między Kopernikiem i Łobaczewskim istnieje ciekawe podobieństwo – obydwaj są z pochodzenia Słowianami, każdy z nich dokonał rewolucji w poglądach naukowych i obie te rewolucje mają równie doniosłe znaczenie, są to bowiem rewolucje w naszym pojmowaniu wszechświata."

W artykule tym nie może być mowy o bliższym wniknięciu w zbudowaną przez Łobaczewskiego geometrię (zwaną czasem hiperboliczną). Poprzestanę tu więc na paru uwagach, które rzucą może trochę światła na różnice oraz na podobieństwa między geometrią Łobaczewskiego a geometrią Euklidesa.

Wspomniałem już, że układ aksjomatów, na którym opiera się geometria Łobaczewskiego, różni się od układu przyjętego przez Euklidesa jedynie zastąpieniem tzw. aksjomatu Euklidesa przez jego zaprzeczenie. Wynika stąd, że wszystkie te twierdzenia geometrii Euklidesa, których dowody nie opierają się na aksjomacie Euklidesa, obowiązują też w geometrii Łobaczewskiego. A więc obie te geometrie mają dość obszerną klasę wspólnych tez, klasę stanowiącą tzw. geometrię absolutną. Do twierdzeń geometrii absolutnej należy np. twierdzenie, że suma dwóch boków w trójkącie jest większa od boku trzeciego. Podobnie jest z tak zwanymi cechami przystawania trójkątów, znanymi z geometrii elementarnej.

By dać przykład twierdzeń geometrii Łobaczewskiego nie występujących w geometrii Euklidesa, wspomnijmy, że z zaprzeczenia aksjomatu Euklidesa wynika już (przy pomocy pozostałych aksjomatów), że w płaszczyźnie przez każdy punkt nie położony na prostej danej przeprowadzić można zawsze, nie jedną, jak w geometrii Euklidesa, ale nieskończenie wiele prostych, które prostej danej nie przecinają. Warto też wspomnieć o niektórych istotnych różnicach obu geometrii w zakresie własności trójkątów. Wiadomo mianowicie, że w geometrii elementarnej (tj. geometrii Euklidesa),

zgadłby, że „długość liczby (liczba pozycji) na bazie $b$" to po prostu liczba cyfr danej liczby w układzie pozycyjnym o podstawie $b$. Jeśli przetłumaczymy na język polski zdanie, które w przekładzie pana Janiaka brzmi: „Wartość liczbowa z nie znanego wyniku może być obliczona z zadaną precyzją", otrzymamy po prostu: „Dokładny wynik nie jest znany, można go jednak obliczyć z dowolną dokładnością".

Wreszcie, tzw. wieczny kalendarz (program wyznaczający dzień tygodnia, przypadający w danym dniu roku) opisany jest jako

„zunifikowane obliczenie kalendarza przez założenie, że kalendarz jest ogólniem[!] pierwiastków mieszanych prezentowanych przez listę."

Ponieważ Autor ma kłopoty z matematyką szkoły podstawowej, łatwo sobie wyobrazić, co dzieje się, gdy przechodzi do licealnej i jeszcze wyższej. Czasami, oczywiście, coś się zgadza, ale każda strona tekstu dowodzi, że Autor ma o matematyce takie pojęcie, jak ja o języku hiszpańskim (byłem kiedyś trzy tygodnie w Madrycie i nauczyłem się słów potrzebnych do biologicznego przeżycia: pan, cerveza, mujer, aiuto, domani, pardon, beefsteak, Hände weg, paszoł won ty). A propos – pan Janiak być może zna hiszpański (kastylijski, a może i kataloński), bo stałą Catalana (po angielsku: Catalan constant) nazwał stałą katalońską.

Ale nie tylko z powodu matematyki pan Włodzimierz Janiak nie powinien zostać promowany do VIII klasy szkoły podstawowej. Oto próbki stylu, jakim posługuje się Autor podręcznika dla uczniów, studentów i młodych naukowców:

„Kiedykolwiek zaistnieje $x$, Mathematica zamieni liczbę $x$ na 5" (str. 29),
„Dobroć dopasowania" (krzywych do danych, str. 201),
„odsłuch" (str. 137),
„Funkcje tego pakietu nie tylko udowadniają istnienie, lecz także tworzą świadectwo, że dana liczba jest liczbą pierwszą (np. odpowiednio krótki zbiór danych), żeby udowodnić primality (bycie liczbą pierwszą)", str. 270,
„Rozwiązując równanie algebraiczne, np.(...), każde rozwiązanie względem $x$ jest liczbą" (str. 62) – uff, to „rozwiązanie rozwiązujące równanie"...,
„Podając inną wartość dla punktu początkowego, wartość minimum lokalnego może być inna" (str. 64),
„Arytmetyka może być osadzona na dowolnej bazie od 2 do 16 i można użyć każdy z kilku schematów" (str. 272).

Autor uważa, że zna język angielski dobrze, a Czytelnicy wcale. I objaśnia: „alpha, beta sigma i lambda oznaczają alfa, beta, sigma i lambda" (str. 197 – zachowałem błędy drukarskie oryginału). I bardzo dobrze, jak mawiał w kabarecie „Owca" Jerzy Dobrowolski.

*Takie będą Rzeczypospolite, jakie ich młodzieży chowanie.* Potencjalnym odbiorcą podręcznika Włodzimierza Janiaka będzie uczeń lub student. Czego się oni nauczą? Zdobędą trochę wiedzy o programie *Mathematica* – bo przecież dla wielu z nich polskopodobny język, jakim posługuje się pan Janiak, będzie bardziej zrozumiały niż angielski. Zrozumieją, że nie warto niczego robić porządnie, że tzw. dobre imię to wymysł zgniłych intelektualistów, że prawo jest po to, aby sobie z niego kpić, że tylko frajerzy uczą się, bo przecież forsę można zrobić na oszustwach i wyłudzeniach. I tak wejdziemy w XXI wiek. Powodzenia, młodzi! Podziękujcie Włodzimierzowi Janiakowi i wydawnictwu PLJ (Warszawa, ul. Uniwersytecka 1 m. 13, tel. (22)-659-42-83).

*Michał SZUREK*

## Patrz w niebo

Wszystkie planety obiegają Słońce w tym samym kierunku – fakt ten wydaje się tak banalny, że nie poświęca mu się niemal żadnej uwagi. Skoro Układ Słoneczny powstał z jakoś wirującej pierwotnej mgławicy, to nic dziwnego, że nadal wszystko obraca się jak poprzednio.

Ale nie jest tak z rotacją samych planet – trzy rotują w kierunku wstecznym, tzn. przeciwnie do kierunku obiegu wszystkich planet: Wenus, Uran i Pluton. W przypadku Urana jest to akurat dość formalne, bo jego oś obrotu leży niemal w płaszczyźnie orbity.

Nie jest też tak z kierunkiem obiegu satelitów planet. Wprawdzie znaczna ich większość obiega swoje planety ruchem prostym, ale Saturn ma jednego satelitę o ruchu wstecznym (Phoebe), a Jowisz cztery (Ananke, Carme, Pasiphae i Sinope). Nawiasem mówiąc te cztery nazwy dla satelitów Jowisza zostały swego czasu specjalnie dobrane, wszystkie kończą się na „e". W ogólności jednak nie każdy satelita o nazwie kończącej się na „e" ma ruch wsteczny. Przyczyny wstecznego ruchu satelitów planet są do dziś właściwie nie znane.

Okazuje się, że jest też przykład ruchu wstecznego w większej skali. Mianowicie w Warkoczu Bereniki leży galaktyka M64 (a więc dość bliska i jasna, skoro znalazła się w katalogu Messiera), w której obszar centralny o promieniu rzędu 1 kpc rotuje w przeciwną stronę niż cała galaktyka. Stwierdzono to kilka lat temu w wyniku radiowych obserwacji neutralnego wodoru w tej galaktyce, prowadzonych za pomocą sieci radioteleskopów Very Large Array w Nowym Meksyku (USA) oraz w obserwatorium w Westerborku (Holandia). Fala 21 cm, emitowana przez wodór, jest pozornie dłuższa, gdy obszar wodoru oddala się od obserwatora, a krótsza, gdy zbliża – jest to efekt Dopplera powodujący również poczerwienienie lub poniebieszczenie światła widzialnego pochodzącego z ruchomego źródła. Właśnie w M64 owo radiowe poczerwienienie i poniebieszczenie względnie małej części centralnej jest przeciwne niż całości galaktyki. Przypuszcza się, że przeciwbieżna rotacja jest skutkiem tego, że galaktyka M64 powstała z dwóch innych rotujących w przeciwne strony. Co prawda, nikt dotychczas jeszcze tego porządnie nie sprawdził, np. poprzez numeryczne symulacje.

*Tomasz KWAST*

**Rozwiązanie zadania F 427.** Czas spadania obliczymy całkując równanie

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

($x$ jest chwilową odległością Ziemi od Słońca)

$$t = \int_h^R \frac{\mathrm{d}x}{v}.$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{x} = -\frac{Gm}{h}$$

otrzymujemy prędkość

$$v = -\sqrt{\frac{2GM(h-x)}{hx}}.$$

Tak więc

$$t = h\sqrt{\frac{h}{2GM}}\int_{R/h}^{1}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\mathrm{d}y.$$

Po obliczeniu całki otrzymujemy

$$t = h\sqrt{\frac{h}{2GM}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{R}{h}} - \sqrt{\frac{R}{h}\left(1-\frac{R}{h}\right)}\right).$$

Ponieważ stosunek $R/h$ jest bardzo mały, drugi i trzeci wyraz są praktycznie zaniedbywalne, a zatem

$$t \approx \frac{\pi h}{2}\sqrt{\frac{h}{2GM}} \approx 64{,}5 \text{ dnia}.$$

Inne rozwiązanie: Trajektoria spadającej Ziemi jest elipsą zdegenerowaną do odcinka, którego jeden koniec znajduje się na orbicie Ziemi, a drugi w środku Słońca. Czas spadania jest równy połowie okresu ruchu po tej elipsie. Duża półoś tej elipsy jest równa połowie promienia orbity Ziemi. Zgodnie z trzecim prawem Keplera czas spadania wyrażony w latach jest równy

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \text{ lat},$$

czyli nieco więcej niż dwa miesiące.

suma kątów w dowolnym trójkącie jest równa 180 stopni. W geometrii absolutnej twierdzenie to nie daje się dowieść, można natomiast okazać, że suma kątów trójkąta jest bądź równa 180 stopni, bądź mniejsza od 180 stopni. Zależnie, która z tych ewentualności zachodzi, mamy geometrię Euklidesa lub geometrię Łobaczewskiego.

Jeżeli jednak rozmiary trójkąta są dostatecznie małe, to suma jego kątów staje się bardzo bliska 180 stopniom. Ze wzrostem trójkąta odchylenie to staje się coraz większe. Fakt ten pozwala szukać odpowiedzi doświadczalnej na pytanie, czy świat zbudowany jest według geometrii Euklidesa, czy może według geometrii Łobaczewskiego. W tym celu zmierzmy sumę kątów dowolnego trójkąta. Jeżeli obowiązuje geometria Euklidesa, suma ta powinna wynosić dokładnie 180 stopni, jeżeli obowiązuje geometria Łobaczewskiego – powinna być mniejsza od 180 stopni. Najbardziej jednak precyzyjne pomiary nie są całkowicie dokładne, a więc za ich pomocą nigdy nie możemy stwierdzić, że suma kątów jest dokładnie równa 180 stopniom. Doświadczenie więc tego rodzaju nie pozwoli z całą pewnością stwierdzić, że obowiązuje geometria Euklidesa. Natomiast należy liczyć się z możliwością, że mierząc trójkąty dostatecznie duże (o wymiarach kosmicznych), w sposób bardzo dokładny, będzie można na tej drodze stwierdzić, że geometria Euklidesa w świecie rzeczywistym nie obowiązuje. Nowoczesne koncepcje fizyczne (teoria względności) przyjmują, że geometria Euklidesa daje dobre przybliżenie rzeczywistości jedynie w obszarach niezbyt wielkich. W skali kosmicznej należy posługiwać się inną geometrią. Jakkolwiek nie jest nią geometria Łobaczewskiego, to jednak Łobaczewski był tym, który stwarzając swą geometrię pierwszy wyszedł świadomie i konsekwentnie poza koncepcję przestrzeni pozostawioną nam przez świat antyczny.

Stworzenie nowej geometrii jest dziełem, które imię Mikołaja Łobaczewskiego ozdobiło blaskim nieśmiertelnej sławy. Dlatego też w artykule tym mówiłem tylko o tym jego dziele. Warto jednak wspomieć, że w ciągu swego pracowitego życia w skromnym środowisku prowincjonalnego uniwersytetu genialny ten człowiek napisał szereg wartościowych prac również z innych działów matematyki (algebry, teorii szeregów, rachunku całkowego). Ponadto nie uchylał się od prac organizacyjnych i administracyjnych, pełniąc przez blisko 20 lat obowiązki rektora Uniwersytetu w Kazaniu. Umarł 24 lutego 1856 roku.