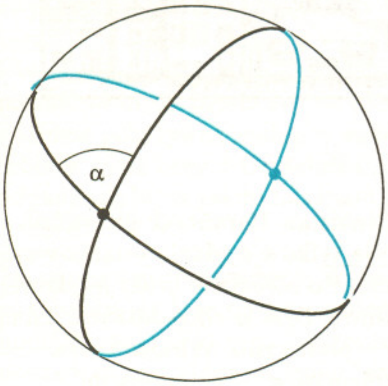
Pole trójkąta sferycznego i wzór Eulera

Marek KORDOS

Na sferze za proste uważa się jej geodezyjne. A geodezyjne jakiejś powierzchni to najmniej krzywe linie na niej. A najmniej krzywymi liniami na sferze (powierzchni kuli) są jej okręgi wielkie. Dwie takie „proste" przecinają się w dwóch antypodycznych punktach (antypodyczne punkty to takie, że łączący je odcinek przechodzi przez środek sfery) i dzielą sferę na cztery dwukąty (tak! na sferze są dwukąty). Dwukąt ma dwa kąty, ale zawsze są one równe.

Pole dwukąta o kącie α jest równe $2\alpha \cdot R^2$, gdzie R to promień sfery. Bardzo łatwo to uzasadnić. Pole dwukąta jest w oczywisty sposób proporcjonalne do jego kąta. Gdy zaś kąt wzrośnie do π, dwukąt stanie się półsferą, czyli będzie miał pole $2\pi \cdot R^2$ i już.

Dla obliczenia pola trójkąta sferycznego wygodnie będzie się zająć sferą jednostkową – wynik pomnożymy przez R^2 i będzie dobrze dla dowolnej sfery, gdyż każda sfera jest podobna do sfery jednostkowej w stosunku R.



Rys. 1

Rys. 2

Niech interesujący nas trójkąt ma kąty α, β, γ. Cała sfera (o polu 4π) to suma sześciu dwukątów – po dwa odpowiadające każdemu z kątów – minus cztery pola trójkątów, bo jest ich dwa (na rysunku 2 jeden jest czarny, a drugi kolorowy) i każdy jest przykryty trzy razy, więc dwa z nich trzeba usunąć. Oznaczając pole trójkąta przez Δ mamy

$$2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 4\pi + 4\Delta\,.$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,,$$

a dla dowolnej sfery to samo pomnożone przez R^2.

Ponieważ każdy wielokąt składa się z trójkątów, więc pole P n-kąta sferycznego daje się obliczyć ze wzoru

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi\,,$$

ewentualnie pomnożone przez R^2 (α_i to kąty n-kąta).

Wynika stąd bardzo sprawnie wzór Eulera. Trzeba tylko zauważyć, że wielościan wypukły ma tę własność, iż da się tak „nadmuchać", by stał się sferą. Inaczej: oglądając go z wewnątrz widzimy jego ściany, krawędzie i boki jakby namalowane na jakiejś sferze (tak jak w starożytności na sferze widziano wszystkie gwiazdy).

Twórca współczesnej geometrii – Mikołaj Łobaczewski (1792–1856)

(artykuł zamieszczony w nr. 61 *Trybuny Ludu* z 3 marca 1956 roku przypomniany nam przez Mieczysława Karpińca)

Karol BORSUK

Wśród idei pozostawionych nam w spuściźnie przez świat antyczny, najbardziej pewnymi, i w pewnym stopniu ostatecznymi, wydają się być idee geometrii elementarnej, sformułowane przez znakomitego matematyka wczesnej epoki hellenistycznej – Euklidesa (około r. 300 przed n.e.) w dziele pt. „Elementy". Od przeszło dwóch tysięcy lat dzieło to zachowuje swą wartość naukową i dotychczas kurs geometrii wykładany w szkole średniej w zasadzie nie wykracza poza jego zakres.

Euklides oparł wykład geometrii na niewielkiej liczbie tzw. aksjomatów przyjętych bez dowodu, starając się wyprowadzić z nich całą resztę rozwiniętej przez siebie teorii. Jak wiadomo, geometria elementarna stanowi podstawę znacznej części przyrodoznawstwa, podstawę niezmiernie pewną, nigdy bowiem bezpośrednie doświadczenie nie doprowadziło do wyników niezgodnych z twierdzeniami geometrii.

Potrzeba było niezmiernej odwagi myślenia, by zdobyć się na pogląd, że koncepcja geometrii przyjęta przez Euklidesa nie jest jedyna, lecz że obok niej postawić można koncepcje innych geometrii, przy czym nie ma pewności, która z nich lepiej opisuje zjawiska świata rzeczywistego. Ten niezmiernie rewolucyjny krok w dziejach myśli ludzkiej dokonany został przez genialnego matematyka rosyjskiego Mikołaja Łobaczewskiego, którego setna rocznica śmierci obchodzona jest w tym roku przez naukę światową.

Mikołaj Łobaczewski urodził się w roku 1792 w Niżnim Nowgorodzie (dziś Gorki) jako syn skromnego urzędnika ziemskiego. Dla czytelnika polskiego interesująca będzie może wiadomość, że ojciec Mikołaja Łobaczewskiego – Jan (Iwan) Łobaczewski pochodził z Polski. Według oświadczenia córki Mikołaja Łobaczewskiego, W. Achłopkowej, Jan Łobaczewski był „katolikiem, architektem, wychodźcą z Carstwa Polskiego".

Całe życie spędził Mikołaj Łobaczewski w Kazaniu, gdzie ukończył szkołę średnią, a następnie (w roku 1811) uniwersytet ze stopniem magistra nauk matematyczno-fizycznych. W roku 1816, a więc jako 24-letni młodzieniec, został profesorem matematyki uniwersytetu w Kazaniu.

W tym też czasie zainteresowania jego zwracają się ku geometrii elementarnej.

Wśród aksjomatów, na których Euklides zbudował swą geometrię, występuje tzw. „postulat V", zwany też aksjomatem Euklidesa. Aksjomat ten mówi (w sformułowaniu nieco uproszczonym), że o ile w płaszczyźnie dana jest prosta i punkt na niej nie leżący, to przez punkt ten można poprowadzić w tej płaszczyźnie dokładnie jedną prostą, która prostej danej nie przecina (a więc tzw. prostą równoległą do prostej danej). Aksjomat ten był przedmiotem długotrwałych i wszechstronnych badań, przypuszczano bowiem, że jest on dla zbudowania geometrii zbyteczny, gdyż daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów przyjętych przez Euklidesa. Liczne próby podania dowodu tego aksjomatu, podjęte przez wielu matematyków poczynając od starożytności (Proklus), a kończąc na znakomitym matematyku francuskim wieku XIX, Legendre, zawiodły.

Również i Mikołaj Łobaczewski próbował początkowo przeprowadzić tego rodzaju dowód, lecz szybko zdał sobie sprawę z daremności tych wysiłków i powziął niezmiernie śmiałą myśl zbudowania nowej geometrii, różnej od geometrii Euklidesa, w której aksjomat Euklidesa nie byłby spełniony. W roku 1826 przedstawił on wyniki swych badań na posiedzeniu Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu w Kazaniu, wygłaszając odczyt pt. „Rozważania nad podstawami geometrii". W odczycie tym przedstawił on po raz pierwszy koncepcję nowej geometrii, istotnie różnej od tradycyjnej geometrii Euklidesa. W roku 1829 ukazała się w rocznikach uniwersytetu w Kazaniu rozprawa Mikołaja Łobaczewskiego pt. „O zasadach geometrii", w której wyłożył on zarys stworzonej przez siebie teorii.

Prawdopodobnie znaczna część Czytelników niniejszego artykułu odczuła pewne rozczarowanie, dowiadując się, że wielkie odkrycie Łobaczewskiego polega na zbudowaniu teorii różniącej się od geometrii Euklidesa jedynie zaprzeczeniem jednego z aksjomatów, którego treść wydaje się być interesująca jedynie dla szczupłej liczby specjalistów. Wielu osądzi, że dzieło Łobaczewskiego było przysłowiową „burzą w szklance wody", zupełnie niewspółmierną

Zatem możemy dowodzić wzoru Eulera dla *poligonizacji sfery*, czyli podziału jej na wielokąty. Oznaczmy przez S liczbę wielokątów, przez K liczbę ich boków (pamiętajmy: każdy bok jest bokiem dwóch wielokątów) i przez W łączną liczbę ich wierzchołków (S, K, W to również, odpowiednio, liczba ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu).

Dowiedziemy zatem wzoru Eulera nie tylko dla wielościanów wypukłych, lecz także dla wszystkich tych, które do sfery „rozdmuchać" się dadzą.

Dodając ich pola, obliczone z uzyskanego przed chwilą wzoru, otrzymujemy

$$4\pi = 2\pi \cdot W - 2K \cdot \pi + S \cdot 2\pi \,.$$

Z lewej strony jest pole całej sfery. Pierwszy wyraz z prawej to suma wszystkich kątów wszystkich wielokątów – w każdym z wierzchołków składają się one na kąt pełny. $2K$ to suma „enów", liczby boków każdego z wielokątów – jest ona dwa razy większa od liczby krawędzi, co już wcześniej zauważyliśmy. Wreszcie S to liczba wielokątów; bierzemy ją 2π razy, bo we wzorze występowała dwójka.

To już koniec, bo dzieląc otrzymaną równość przez 2π otrzymujemy wzór Eulera, czyli

$$W - K + S = 2 \,.$$

Suplement do Barańczaka

Nie pamiętam, w jakim magazynie Stanisław Barańczak prowadził rubrykę „Książki najgorsze" – znam ją tylko z wydania książkowego. Wyszydzał tam figlarny styl, świadczące o nieuctwie braki językowe, pustosłowie, sztuczność – wszelką szmirę. Dziś ja chcę dorzucić jedną pozycję do tej niezbyt chlubnej listy – podręcznik Włodzimierza Janiaka pod tytułem *Wstęp do „Mathematica" – programu do obliczeń matematycznych*, wydany przez Wydawnictwo PLJ w Warszawie (1994).

Lektura tej książki przypomniała mi wymyśloną przeze mnie postać Profesora Idziego Tyzroba. Idzi Tyzrób zaczął swą edukację od studiów na uniwersytecie w Murzasichlu, gdzie został przyjęty po udzieleniu poprawnej odpowiedzi na pytanie „Kto tam?". Gdy okazało się, że nie umie pisać ani czytać, otrzymał dyplom magistra i zapisano go do szkoły powszechnej. Opowiadał w wiele lat potem, że te kilkanaście lat, jakie spędził w szkole na zgłębianiu elementarza i rachunków w zakresie do 100, należało do najpiękniejszych i najbardziej twórczych okresów jego życia.

Po ukończeniu szkoły powszechnej Idzi, teraz już z tytułem docenta nadzwyczajnego, wyjechał na studia doktoranckie do Milanówka, gdzie kontynuował rozpoczętą w szkole powszechnej naukę. Z biegiem lat doszedł do wspaniałych rezultatów, z których najważniejszy to odkrycie *operatorów leniwych*, znanych też pod nazwą operatorów Tyzroba. Mówimy, że A jest operatorem leniwym, gdy $A(x)$ mogłoby się równać y, gdyby mu się tylko chciało. Wprowadzenie operatorów leniwych zrewolucjonizowało całą matematykę. Gdy bowiem rozwiązujemy dowolne zadanie U, wystarczy znaleźć odpowiadający mu operator leniwy $Len(U)$.