Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

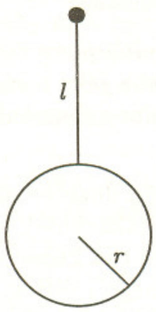
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 1996

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

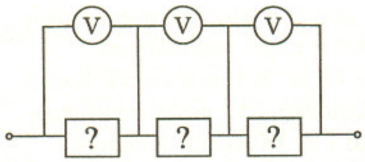
Zadania z fizyki nr 219, 220

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

219. Jeden koniec nierozciągliwej i nieważkiej nitki o długości l jest przymocowany do pewnego punktu na powierzchni bocznej walca o promieniu r, a drugi koniec – do małej kulki znajdującej się w odległości $l+r$ od osi walca (rys. 1). W chwili początkowej kulka była nieruchoma, a walec wprawiono w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω wokół jego osi. Gdy nitka się nawinie, z jaką prędkością kulka uderzy w walec? Na kulkę działa tylko siła wywierana przez nitkę (pomijamy siłę ciężkości i opory ruchu).



Rys. 2

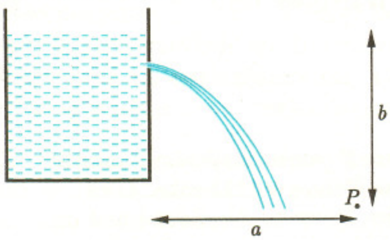
220. Trzy woltomierze mierzą napięcia na trzech „czarnych skrzynkach" połączonych szeregowo (rys. 2). Początkowo napięcia były równe zeru, a gdy do układu przyłożono stałe napięcie 60 V, pierwszy woltomierz wskazał napięcie 10 V, drugi 20 V, a trzeci 30 V. Po pewnym czasie napięcie na pierwszej „czarnej skrzynce" wzrosło do 30 V, na drugiej zmalało do 10 V, a na trzeciej zmalało do 20 V. Po jeszcze dłuższym czasie napięcia wynosiły kolejno: 20 V, 30 V i 10 V. Zaprojektować jak najprostsze wnętrze „czarnych skrzynek", które da taki efekt. Można przyjąć, że woltomierze nie zakłócają mierzonego napięcia (mają bardzo duży opór wewnętrzny).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1996

Przypominamy treść zadań:

211. Punkt P znajduje się w odległości a od pionowej ścianki naczynia, a różnica wysokości między nim a poziomem cieczy w naczyniu jest równa b (rys. 3). Jaki warunek muszą spełniać a i b, żeby strumień cieczy wytryskującej przez otworek w ściance nie mógł osiągnąć punktu P, niezależnie od położenia otworka?

212. Cewkę umieszczono w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym, gdzie płynący przez nią prąd o natężeniu I powoduje wystąpienie wypadkowej siły $\mathbf{F}$. Przyjmijmy założenie, że taka sama siła działa na cewkę w każdym miejscu pewnego obszaru Ω. Wykazać, że jeśli cewka jest bezoporowa i nie może się obracać (a jedynie przesuwać równolegle), to po jej zwarciu i pchnięciu w kierunku siły $\mathbf{F}$ będzie się ona w obrębie Ω poruszała ruchem drgającym. Znaleźć częstotliwość tych drgań, jeśli masa cewki jest równa m, a indukcyjność L.



Rys. 3

211. Ze wzoru Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) wynika, że prędkość strumienia cieczy o gęstości ϱ wypływającego z naczynia pod ciśnieniem p jest równa $v=\sqrt{2p/\varrho}$. Jeśli otwór jest na wysokości h pod poziomem wody, to $p=\varrho g h$, a z drugiej strony wysokość spadku wynosi $b-h$, zatem czas spadku $t=\sqrt{2(b-h)/g}$. Odległość osiągnięta przez strumień w ciągu tego czasu wynosi $vt = 2\sqrt{h(b-h)}$. Wyrażenie to osiąga maksymalną wartość równą b dla $h=b/2$. Zatem punkt P będzie niedostępny dla strumienia cieczy wtedy, gdy $a>b$. Inaczej mówiąc, prosta $a=b$ jest obwiednią rodziny parabol (strumieni wytryskujących przez różne otworki).

212. Siła działająca na obwód w polu magnetycznym jest opisana całką

$$\mathbf{F} = I\oint \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}\,.$$

Okazuje się, że taka sama całka $\oint \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}$ (oznaczymy ją symbolem $\mathbf{C}$) występuje również we wzorze na siłę elektromotoryczną indukcji $\mathcal{E} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Zauważmy bowiem, że gdy cewka przesuwa się o odcinek $\mathrm{d}\mathbf{r}$, każdy elementarny odcinek obwodu $\mathrm{d}\mathbf{l}$ zakreśla równoległobok o polu $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}$ (wektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$ jest skierowany prostopadle do równoległoboku). Odpowiednia zmiana strumienia wynosi $\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} = (\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l})\cdot\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B})$, a dla całego obwodu otrzymujemy $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\oint\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{C}$, czyli $\mathcal{E} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{v}$ jest prędkością cewki. Dla cewki bezoporowej ta „zewnętrzna" siła elektromotoryczna równoważy się z SEM samoindukcji, czyli

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{C} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ponadto spełnione jest równanie ruchu cewki

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = I\mathbf{C}\,.$$

Biorąc składową $\mathbf{v}$ równoległą do $\mathbf{C}$ i podstawiając jedno równanie do drugiego otrzymujemy równanie ruchu harmonicznego o częstotliwości $\nu = C/(2\pi\sqrt{mL}) = F/(2\pi I\sqrt{mL})$. (Przy okazji sprawdziliśmy, że znaki w równaniach były prawidłowe – inaczej otrzymalibyśmy nieskończone przyspieszenie cewki, niezgodne z zachowaniem energii.)

$\otimes\sqrt{\int\!\!\Sigma!}=44$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 303 (WT=3,43) i 304 (WT=1,51) z numeru 8/1995

Lesław Skrzypek	– Rzeszów	45,80
Mirosław Matlęga	– Skoczów	44,04
Adam Czornik	– Bytom	41,29
Piotr Lipiński	– Radom	39,33
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	38,93
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	36,66
Henryk Kornacki	– Augustów	36,45

Pan Skrzypek przekroczył **44** punkty po raz trzeci (i jest siedemnastym Weteranem matematycznym); pan Matlęga: po raz pierwszy.

Zadania z matematyki nr 321, 322

Redaguje Marcin E. KUCZMA

321. Po nieskończonej szachownicy porusza się (m,n)-koń, czyli figura, która w każdym ruchu przemieszcza się o m pól poziomo i n pól pionowo – lub odwrotnie: n poziomo i m pionowo (tak więc $(2,1)$-koń to zwykły skoczek). Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m,n \ge 1$, dla których (m,n)-koń, startując z dowolnego pola szachownicy, może osiągnąć każde inne pole.

322. Dane są liczby naturalne $m,q>1$ oraz liczba p określona przez równanie $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Obliczyć część całkowitą sumy $1^{-1/p}+2^{-1/p}+\ldots+(m^q-1)^{-1/p}$.

Zadanie **322** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1996

Przypominamy treść zadań:

313. Ciąg (x_n) jest określony wzorami: $x_0=\pi/3$, $x_{n+1}=x_n\cos x_n$ dla $n=0,1,2,\ldots$. Wykazać, że szereg $\sum x_n^3$ jest zbieżny i że jego suma jest liczbą mniejszą od $7/3$.

314. Na płaszczyźnie dane są dwa kwadraty $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$, jednakowo zorientowane oraz tak położone, że $A_1\ne A_2$, $C_1\ne C_2$. Udowodnić, że proste A_1A_2 i C_1C_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $|B_1B_2|=|D_1D_2|$.

313. Funkcja $g(x)=(1-\cos x)/x^2$ ma w przedziale $(0;\frac{1}{2}\pi)$ pochodną ujemną:
$g'(x)=x^{-4}(x^2\sin x-2x(1-\cos x))=2x^{-3}(\sin x)(\frac{1}{2}x-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)$;
jest więc w tym przedziale malejąca. W takim razie

$$g(x)\ge g(\tfrac{1}{3}\pi)=\tfrac{9}{2}\pi^{-2}\qquad \text{dla } x\in(0;\tfrac{1}{3}\pi\rangle,$$

czyli

$$\cos x\le 1-\tfrac{9}{2}\pi^{-2}x^2\qquad \text{dla } x\in(0;\tfrac{1}{3}\pi\rangle.$$

Wszystkie wyrazy rozważanego (malejącego!) ciągu (x_n) leżą w przedziale $(0;\frac{1}{3}\pi\rangle$. Zatem

$$\cos x_n\le 1-\tfrac{9}{2}\pi^{-2}x_n^2\qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots\ ;$$

po pomnożeniu stronami przez x_n (i prostym przekształceniu):

$$x_n^3\le \tfrac{2}{9}\pi^2(x_n-x_{n+1})\qquad \text{dla } n=0,1,2,\ldots\ .$$

Dla sum częściowych badanego szeregu otrzymujemy stąd oszacowanie

$$s_n=x_0^3+\ldots+x_n^3=\tfrac{2}{9}\pi^2(x_0-x_{n+1})<\tfrac{2}{9}\pi^2x_0=\tfrac{2}{27}\pi^3,$$

więc ostatecznie

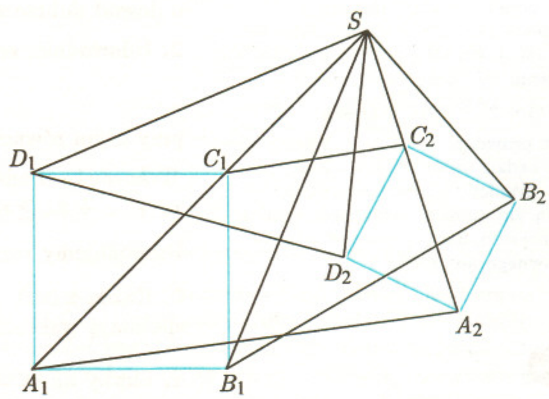
$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n^3=\lim_{n\to\infty}s_n\le\tfrac{2}{27}\pi^3<\tfrac{7}{3}.$$

314. Rozpatrzymy dwa przypadki:

(I) Proste A_1C_1 i A_2C_2 są równoległe. Wtedy kwadrat $A_2B_2C_2D_2$ jest obrazem kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ w przekształceniu, które jest albo przesunięciem, albo jednokładnością o skali $\lambda\ne 1$, o środku w punkcie przecięcia prostych A_1A_2 i C_1C_2. W pierwszym z tych podprzypadków zachodzą oba badane związki ($A_1A_2\|C_1C_2$ i $|B_1B_2|=|D_1D_2|$), a w drugim nie zachodzi żaden z nich; teza jest spełniona.

(II) Proste A_1C_1 i A_2C_2 nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez S (rysunek; uwaga: punkt S może także leżeć na odcinkach A_1C_1 i A_2C_2, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe i w takiej sytuacji; nieufnym Czytelnikom proponujemy wykonanie rysunku).

Dowód implikacji $(A_1A_2\|C_1C_2)\Rightarrow(|B_1B_2|=|D_1D_2|)$.
Jeśli $A_1A_2\|C_1C_2$, to na mocy twierdzenia Talesa $|SC_2|:|SC_1|=|SA_2|:|SA_1|$; oznaczmy wspólną wartość tych stosunków przez λ. Niech f będzie złożeniem jednokładności o środku S i skali λ z obrotem wokół punktu S o kąt skierowany $\varphi=\angle(\overrightarrow{SA_1},\overrightarrow{SA_2})=\angle(\overrightarrow{SC_1},\overrightarrow{SC_2})$. Zachodzą równości $f(A_1)=A_2$, $f(C_1)=C_2$. Przekształcenie f jest podobieństwem; w takim razie również $f(B_1)=B_2$, $f(D_1)=D_2$. Zatem $\angle(\overrightarrow{SB_1},\overrightarrow{SB_2})=\angle(\overrightarrow{SD_1},\overrightarrow{SD_2})$. Ponadto $|SB_1|=|SD_1|$, $|SB_2|=|SD_2|$, skąd wniosek, że trójkąty SB_1B_2 i SD_1D_2 są przystające, i wobec tego $|B_1B_2|=|D_1D_2|$.



Dowód implikacji $(|B_1B_2|=|D_1D_2|)\Rightarrow(A_1A_2\|C_1C_2)$.
Odwracamy poprzednie wnioskowanie. Z równości $|B_1B_2|=|D_1D_2|$, $|SB_1|=|SD_1|$, $|SB_2|=|SD_2|$ wynika, że trójkąty SB_1B_2 i SD_1D_2 są przystające. Teraz określamy przekształcenie (podobieństwo) f jako złożenie jednokładności o środku S i skali $\lambda=|SB_2|:|SB_1|=|SD_2|:|SD_1|$ z obrotem wokół punktu S o kąt skierowany $\varphi=\angle(\overrightarrow{SB_1},\overrightarrow{SB_2})=\angle(\overrightarrow{SD_1},\overrightarrow{SD_2})$. Zachodzą równości $f(B_1)=B_2$, $f(D_1)=D_2$, z których wnosimy, że także $f(A_1)=A_2$, $f(C_1)=C_2$. Stąd $|SA_2|:|SA_1|=|SC_2|:|SC_1|$, i na mocy (odwrotnego) twierdzenia Talesa: $A_1A_2\|C_1C_2$.