# Kącik olimpijski (16) — O pewnej sprytnej metodzie (część II)

W poprzednim kąciku olimpijskim *O pewnej sprytnej metodzie* (I) przedstawiliśmy kilka zadań. By je rozwiązać, należało „sprytnie” dobrać pewną funkcję i skorzystać z dosyć oczywistego stwierdzenia:

*Niech $P$ będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych i funkcja $f\colon P \to \mathbf{R}$ spełnia warunek $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeżeli liczby $x_1, \ldots, x_n$ należą do $P$, to $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.*

Po prześledzeniu przykładów i zadań z poprzedniego kącika rodzi się oczywiste pytanie: jak znaleźć taką funkcję, która praktycznie rozwiązuje całe zadanie? W poniższym przykładzie spróbujemy „wyprowadzić” wzór definiujący odpowiednią funkcję.

**1.** Liczby nieujemne $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek: $x_1 + \ldots + x_n = 1/2$. Dowieść, że

$$(*) \qquad \frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

Kiedy zachodzi równość?

Możemy dodatkowo założyć, że $x_i \in [0, 1/2]$, gdyż liczby nieujemne spełniające warunek $x_1 + \ldots + x_n = 1/2$ należą do przedziału $[0, 1/2]$. We wszystkich nierównościach dowodzonych przez nas poprzednim razem mieliśmy do czynienia z sumą $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$, a nie z iloczynem $f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$. Przekształćmy więc lewą stronę w nierówności $(*)$ tak, aby doprowadzić ją do postaci sumy $n$ składników. W tym celu zlogarytmujmy obie strony nierówności:

$$\ln\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{1-x_n}{1+x_n}\right) \geq -\ln 3.$$

Funkcja, której szukamy, będzie zatem miała postać:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + Ax + B.$$

Zastanówmy się teraz, kiedy zachodzi równość w nierówności $(*)$. Nietrudno zgadnąć, że na przykład wtedy, gdy jedna z liczb $x_i$ jest równa $1/2$, pozostałe zaś są zerami. Zatem nasza funkcja $f$ powinna mieć miejsca zerowe w punktach $0$ i $1/2$. Mamy więc $0 = f(0) = \ln 1 + B$ oraz $0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 3 + \frac{1}{2}A + B$, skąd $A = 2\ln 3$, $B = 0$. Tak więc

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + (2\ln 3)x$$

i funkcja gotowa. Sprawdzenie, czy owa funkcja faktycznie „rozwiązuje” zadanie, pozostawiamy Czytelnikowi.

W kolejnym przykładzie podamy jedynie wskazówkę, jak uprościć zadanie (chodzi o dowód dobrze znanej *nierówności o średnich*).

**2.** Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n},$$

przy czym równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

*Wskazówka:* Podstawiając $x_i = a_i / \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ dostajemy do udowodnienia nierówność $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ przy założeniu $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$.

Proponujemy rozwiązać jeszcze kilka podobnych zadań.

**3.** Każda z liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ należy do przedziału $[-1, 1]$. Liczby te spełniają warunek $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Dowieść, że $x_1 + \ldots + x_n \leq n/3$.

**4.** Liczby $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należą do przedziału $[0, 2]$, przy czym $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq n$. Wykazać, że

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right) - n \leq 11\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) - n\right).$$

**5.** Liczby $x_1, \ldots, x_n$ należą do przedziału $[a, b]$, przy czym $a + b > 0$. Dowieść, że

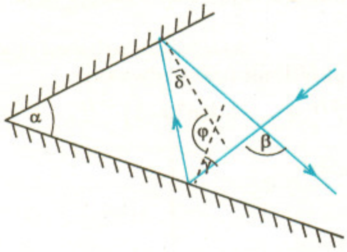
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n(a+b)}.$$

**6.** Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$, wyznaczyć maksymalną wartość sumy liczb naturalnych $k_1, k_2, \ldots, k_n$ spełniających warunek $k_1^3 + k_2^3 + \ldots + k_n^3 \leq 7n$.

*Krzysztof CHEŁMIŃSKI*
*Waldemar POMPE*

---

**Rozwiązanie zadania F 428.** Rozważmy zwierciadlany kąt dwuścienny $\alpha$. Niech kąt padania promienia na pierwsze zwierciadło będzie równy $\gamma$, na drugie $\delta$.




Zaznaczony na rysunku kąt $\beta$ jako kąt zewnętrzny trójkąta wyznaczonego przez promienie jest równy $2(\gamma + \delta)$. Jednocześnie $\gamma + \delta = \alpha$, ponieważ, jak widać z rysunku, zarówno $\gamma + \delta$, jak i $\alpha$ dopełniają kąt $\varphi$ do $\pi$. Ostatecznie $\beta = 2\alpha$.
Wielką zaletą sekstantu jest prostota jego budowy i zasady działania; pomiaru można dokonać na kołyszącym się pokładzie (np. statku).

**Rozwiązanie zadania M 771.** Ponieważ łączny kapitał znajdujący się w grze to 30 zł, więc gdy jeden z graczy wygrałby 30 razy z rzędu, drugi musiałby zbankrutować. Gdyby zatem bankructwo miało nie nastąpić aż do $30n$ rzutów, wyniki gier o numerach od 1 do 30 nie mogłyby być takie same, ani wyniki gier o numerach od 31 do 60, ani o numerach od 61 do 90, ..., ani o numerach od $(30n - 29)$ do $30n$ nie mogłyby być takie same. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest, oczywiście, równe

$$(1 - 2^{-30} \cdot 2)^n = (1 - 2^{-29})^n.$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że gra trwać będzie nieskończenie długo, jest równe granicy tego wyrażenia przy $n$ dążącym do nieskończoności, czyli 0. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego jest równe 1.

**Rozwiązanie zadania M 772.** Jeśli $p_n$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że gracz o kapitale $n$ zł zbankrutuje grając z graczem o kapitale $(30 - n)$ zł, to

$$p_n = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}.$$

Istotnie, gracz ma w pewnej chwili $n$ zł, gdy w poprzedniej miał $(n-1)$ zł i (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) wygrał, lub gdy miał $(n+1)$ zł i (także z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) przegrał. Zatem $(p_n)$ jest ciągiem arytmetycznym. Ponieważ $p_0 = 1$ i $p_{30} = 0$, więc łatwo ustalić, że $p_{10} = 1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3}$.