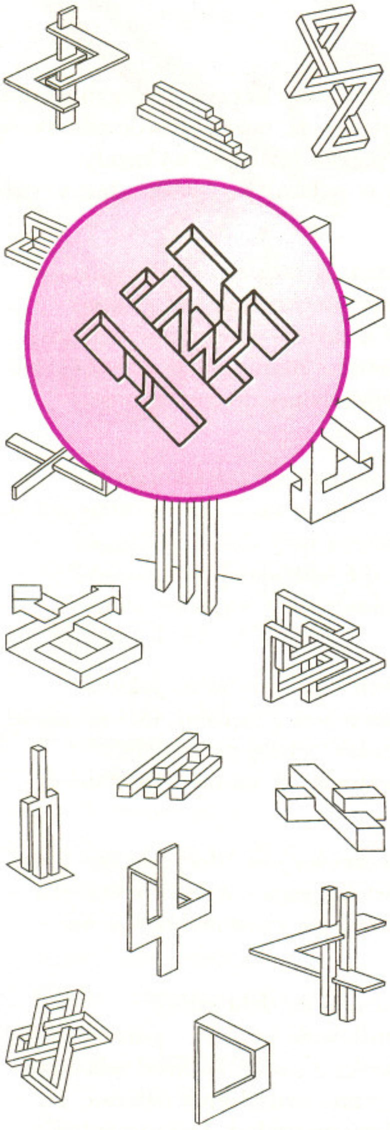


Wielomian, który nie ma pierwiastków

Jak wiele innych ważnych twierdzeń matematyki, zasadnicze twierdzenie algebry, udowodnione przez Carla Friedricha Gaussa w ostatnim roku osiemnastego stulecia, informuje nas, że pewne obiekty nie istnieją. Mianowicie, nie ma takiego, różnego od stałej, wielomianu zmiennej zespolonej, który nie znikałby w żadnym punkcie płaszczyzny zespolonej **C** (kto nigdy nie słyszał o liczbach zespolonych, niech zajrzy najpierw do artykułu Zbigniewa Marciniaka o trójwymiarowym mnożeniu).

Dziś znanych jest wiele dowodów zasadniczego twierdzenia algebry, chciałoby się rzec, *jeden piękniejszy od drugiego*. Żaden, niestety, nie nadaje się do tego, by zwięźle i ze **wszystkimi** niezbędnymi szczegółami przedstawić go Czytelnikom *Delty*. Dla ciekawych – szkic dwóch różnych dowodów nie korzystających wcale z metod algebraicznych.

Dowód pierwszy opiera się na dwóch lematach, z których zasadnicze twierdzenie algebry wynika natychmiast.

Lemat 1. *Jeśli* $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *jest wielomianem, to istnieje taki punkt* $z_0 \in \mathbf{C}$, *w którym funkcja* $|P|$ *osiąga swój kres dolny.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla punktów z leżących poza dużym kołem domkniętym $K(0,R)$ moduł wielomianu jest duży, zatem kresy dolne zbiorów $\{|P(z)| \ : \ z \in \mathbf{C}\}$ i $\{|P(z)| \ : \ z \in K(0,R)\}$ są równe. Funkcja $|P|$ jest ciągła, więc na zwartym zbiorze $K(0,R)$ osiąga swój kres dolny.

Lemat 2. *Niech* P *będzie wielomianem niezerowego stopnia. Jeśli* $z_0 \in \mathbf{C}$ *jest takim punktem, że* $|P(z_0)| \le |P(z)|$ *dla wszystkich* $z \in \mathbf{C}$, *to wtedy* $P(z_0) = 0$.

Dowód tego lematu jest trudniejszy i znacznie bardziej techniczny, lecz można go przeprowadzić dysponując jedynie elementarną wiedzą o liczbach zespolonych.

Najprościej jest dokonać *reductio ad absurdum* a robi się to tak. Mnożąc w razie potrzeby wielomian przez stałą i przesuwając jego wykres, można założyć, że $z_0 = 0$, $P(z_0) = a_0 > 0$. Przypuśćmy też, że wielomian P nie zawiera dodatnich potęg z mniejszych od k-tej, $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_k z^k + a_0$. Zatem $a_k = \exp(i\phi)$. Wtedy, dla $z = \delta \exp(i(\pi - \phi)/k)$, mamy $a_k z^k = -\delta^k < 0$. Zatem $|a_k z^k + a_0| < a_0$ dla małych $\delta > 0$. Nietrudno teraz wykazać, że dopisanie pod modułem pozostałych wyrazów wielomianu nic nie popsuje: jest ich skończenie wiele i wszystkie są blisko zera nieskończenie mniej ważne niż $a_k z^k$. Dokładny dobór δ zostawiamy wytrwałym Czytelnikom.

Dowód drugi wykorzystuje tzw.

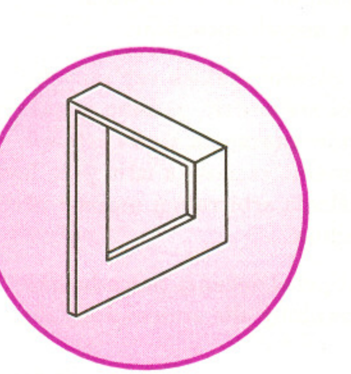
Mówimy, że funkcja f jest ograniczona, jeśli istnieje taka liczba M, że dla wszystkich zespolonych z mamy $|f(z)| \le M$.

Twierdzenie Liouville'a. *Załóżmy, że* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *jest funkcją ograniczoną. Jeśli* f *jest różniczkowalna w każdym punkcie, tzn. dla każdego* $z_0 \in \mathbf{C}$ *istnieje granica*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

to f *jest tożsamościowo równa pewnej stałej.*

Dowód tego faktu można znaleźć w dowolnym podręczniku teorii funkcji zmiennej zespolonej. Warto zauważyć, że gdy liczby zespolone zastąpić rzeczywistymi, to twierdzenie Liouville'a będzie fałszywe (przykład: $f(x) = 1/(x^2+1)$).



Przypuśćmy teraz, że P jest takim wielomianem zmiennej zespolonej, że $P(z) \ne 0$ dla wszystkich z. Nietrudno wtedy zauważyć, że funkcja dana wzorem $f(z) = 1/P(z)$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia Liouville'a (ograniczoność funkcji $1/P$ wynika, podobnie jak Lemat 1 w pierwszym dowodzie, z obserwacji, że moduł wielomianu nie może być mały na zewnątrz pewnego dużego koła). Zatem, $1/P = \text{const}$, a więc także $P = \text{const}$, co kończy dowód zasadniczego twierdzenia algebry.

Paweł STRZELECKI