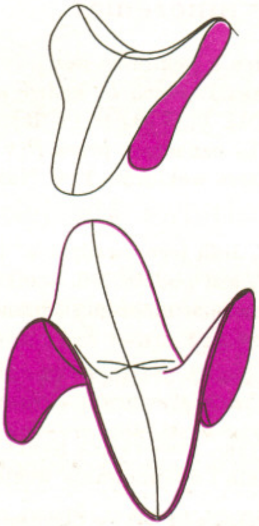


Małpie siodło

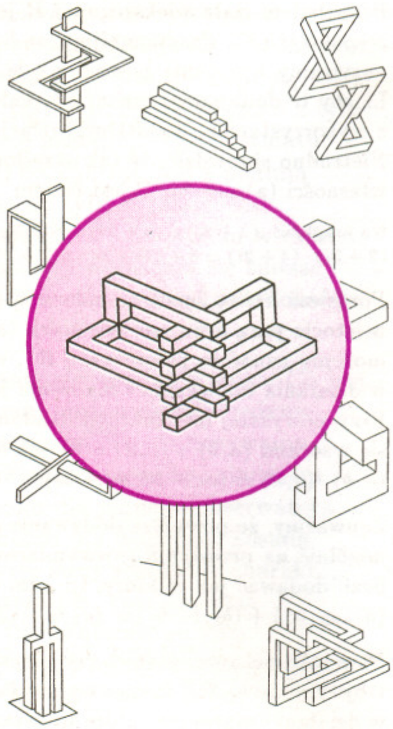
Zwykłe siodło do konnej jazdy ma dwa łęki i dwie klapy – z przodu i z tyłu jest podniesione do góry, z obu boków opada w dół. Jest przy tym wszędzie krzywe, czyli niepłaskie; dokładniej: płaszczyzna styczna do tego siodła (w dowolnym jego punkcie) nawet w najmniejszym otoczeniu punktu styczności przecina siodło, znajduje się po obu jego stronach.

Gdyby chcieć zrobić siodło dla małpy szerokonosej (małpy Nowego Świata), słowem małpy z liczącym się ogonem, musiałoby ono mieć trzy klapy i trzy łęki. Okazuje się jednak, że zrobienie takiego dobrego siodła jest niemożliwe – zawsze będzie na nim co najmniej jeden punkt, w którym będzie ono lokalnie płaskie.

Bierze się to z faktu, że ekstremalne krzywizny przecięć powierzchni gładkiej prostopadłych do płaszczyzny stycznej i przechodzących przez punkt styczności realizują się w płaszczyznach prostopadłych. Przy potrójnej symetrii powierzchni – a taką ma małpie siodło – jedynym wyjściem jest, by ekstrema te były równe zeru, a więc by zero było krzywizną każdego takiego przecięcia.

M.K.

Największa liczba pierwsza



Jeśli liczba naturalna q jest największą liczbą pierwszą, to istnieje liczb pierwszych tylko skończenie wiele – na pewno nie więcej niż $q-1$. Można je więc wszystkie ponumerować, powiedzmy $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m$, gdzie, oczywiście, $m < q-1$. Liczba

$$L := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m \cdot q + 1$$

ma paradoksalne własności. Jako większa od q nie jest liczbą pierwszą, jako liczba nie dzieląca się przez żadną z liczb $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m,\ q$ nie ma dzielników naturalnych różnych od 1 i niej samej – jest więc pierwsza. Dlatego też w jej definicji musiał zostać popełniony błąd. Ale jedynym miejscem niepewnym jest założenie, że istnieje największa liczba pierwsza – ono więc musi być fałszywe.

Jest to pierwsze historycznie spośród twierdzeń matematyki, które postulują, że czegoś jest nieskończenie wiele. Zostało udowodnione 2300 lat temu, najprawdopodobniej przez Euklidesa.

Mimo to, od czasu do czasu, prasa mniej lub bardziej naukowa donosi, że największą liczbą pierwszą jest – żeby podać konkretny przykład ze stycznia 1994 – liczba $2^{859433}-1$. Rzecz jasna, chodzi tu o największą liczbę pierwszą, jaką w danej chwili umielibyśmy konkretnie napisać np. w układzie dziesiętnym. Poszukiwanie takich liczb to dobre zajęcie, bo – jak widać – nigdy się nie skończy.

M.K.

Rozwiązanie zadania F 426. Współrzędne wektora indukcji w sferycznym układzie współrzędnych są równe

$$B_r = \frac{2\mu_0 M}{4\pi r^3}\cos\Theta\,,$$

$$B_\Theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\sin\Theta\,,$$

$$B_\phi = 0\,.$$

M jest momentem magnetycznym Ziemi. Dostajemy stąd

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\sqrt{3\cos^2\Theta+1}\,.$$

Indukcja na równiku jest równa

$$B_0 = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\,.$$

Stąd

$$B = B_0\frac{R^3}{r^3}\sqrt{3\cos^2\Theta+1}\,.$$

Energię obliczamy jako całkę po całej przestrzeni poza objętością Ziemi

$$E_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_{r\ge R} B^2\,\mathrm{d}^3 r =$$

$$= \frac{B_0^2R^6}{2\mu_0}\int\limits_R^\infty \mathrm{d}r\,r^2\frac{1}{r^6}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\Theta\,\sin\Theta(3\cos^2\Theta+1) = \frac{4\pi B_0^2R^3}{3\mu_0}\,.$$

Podstawiając wartości podane w zadaniu dostajemy

$$E_{\mathrm{mag}} = 9{,}7\cdot 10^{17}\ \mathrm{J}\,.$$

Energię pola grawitacyjnego obliczymy ze wzoru

$$E_{\mathrm{graw}} = \frac{GM^2}{2R}\,.$$

Jest ona równa $3\cdot 10^{30}$ J.